# EINLEITUNG

IN DIE THEORIE

DER

# AREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MIT

EINER UNABHÄNGIGEN VARIABLEN

VON

**Dr. LOTHAR HEFFTER,**

A. O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN.

MIT 3 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN PROFESSOR DR. L. FUCHS

IN HERZLICHER DANKBARKEIT

ZUGEEIGNET

VOM VERFASSER.

# Vorwort.

Seitdem die Theorie der linearen Differentialgleichungen durch die beiden Abhandlungen von Fuchs im 66ten und 68ten Band des Crelle'schen Journals, denen schon 1865 eine Publication im Jahresbericht der städtischen Gewerbeschule zu Berlin vorausgegangen war, die Grundlage ihrer heutigen Gestalt erhalten hat, ist eine umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand erschienen; aber abgesehen von dem Werk von Th. Craig (A treatise on linear differential equations, t. 1. New-York, 1889) und von solchen Büchern, in denen die genannte Theorie nur als spezieller Teil eines grösseren Ganzen erscheint (wie z. B. in Koenigsberger's Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig, 1889), fehlt es bisher noch immer an einer einheitlichen zusammenfassenden Darstellung. Wenn nun auch diesem Mangel durch das in Vorbereitung begriffene „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen" von L. Schlesinger in Berlin, welches die ganze Fülle des angehäuften Stoffes ordnen und übersichtlich entwickeln will, in umfassender Weise abgeholfen wird, so bleibt daneben doch noch das Bedürfnis nach einer — soweit es die Verhältnisse gestatten — elementar gehaltenen Einführung in die Grundlagen der Theorie bestehen.

Diesem Bedürfnis wünscht das vorliegende Buch zu entsprechen. Es möchte durch einen möglichst bequemen Eingang einen immer grösseren Kreis von Mathematikern zum Eintritt in dieses fruchtbare und wichtige Gebiet der Wissenschaft veranlassen. Es hofft, schon dem Studierenden, der erst die Elemente der Differential- und Integralrechnung, der Functionentheorie und die Hauptsätze der Determinantentheorie beherrscht, jenen Eintritt zu ermöglichen und vielleicht auch dem Docenten einen Leitfaden für eine einführende Vorlesung zu liefern.

Zur Erreichung dieses Zwecks schien in erster Linie eine *Beschränkung in der Auswahl des Stoffes* geboten. Der Inhalt des Buches umfasst deshalb im wesentlichen nur den Nachweis der Existenz von

Integralen und die Untersuchung von deren Verhalten in der Umgebung der einzelnen Stellen bei linearen homogenen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten. Im übrigen wurde nur zugelassen, was als Hülfsmittel oder Illustration für diese Hauptaufgabe dienen konnte, oder was sich unmittelbar daran anknüpfen liess. Hierin möge es seine Erklärung finden, wenn z. B. die elegante und an und für sich nicht schwierige Theorie der adjungierten Differentialgleichungen in dem Buche nicht berührt wird. Für das weitergehende Studium darf ja auch der Leser auf die schon erwähnten Bücher von Craig und Schlesinger, vor allem aber auf die einschlägigen Originalabhandlungen verwiesen werden.

Von besonderer Wichtigkeit mit Rücksicht auf das angestrebte Ziel war dem Verfasser die *Anordnung des Stoffes* und die Verbindung seiner einzelnen Teile. Er wünschte einen Weg zu verfolgen, der möglichst naturgemäss erscheint und bei Vermeidung von Wiederholungen, soweit es irgend angeht, stets vom Einfacheren zum Complicierteren und Schwierigeren vorschreitet. Es sei gestattet, diesen Weg schon an dieser Stelle kurz anzugeben.

Da die Coefficienten der der Untersuchung zu Grunde gelegten linearen homogenen Differentialgleichung nach Voraussetzung in der Umgebung jedes Wertes der unabhängigen Variablen die Gestalt von eindeutigen Potenzreihen haben, liegt die Frage nahe, ob sich vielleicht auch ein Integral der Differentialgleichung in Form einer Reihe bestimmen lässt. Sie findet ihre Beantwortung in Kapitel I insoweit, als die Möglichkeit der formalen Herstellung einer derartigen Reihe mittelst einer *Recursionsformel* nachgewiesen wird, falls man sowohl von den Coefficientenreihen, als von der angesetzten Integralreihe annimmt, dass sie sich bei der in's Auge gefassten Stelle bestimmt verhalten, d. h. höchstens in Richtung der wachsenden Exponenten in's Unendliche gehen. In Kapitel II wird darauf die *Berechnung der Reihencoefficienten* aus der Recursionsformel einer eingehenden Untersuchung unterworfen und in Kapitel III die *Convergenz* der so ermittelten Reihen dargethan, wenn der zu Grunde gelegte Wert der unabhängigen Variablen eine Stelle der Bestimmtheit[1]) ist. Da alle im Weierstrass'schen Sinne regulären Stellen der Coefficienten Stellen der

1) Die Einführung dieses Begriffs (s. S. 14) stützt sich auf die Beschaffenheit der *Coefficienten* der Differentialgleichung; der Name ist im Anschluss an Fuchs (Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1886, S. 281) gewählt. Anschliessend an Thomé (s. S. 90, Anm. 2)) nennt man dieselben Stellen *regulär;* doch soll die letztere Bezeichnung hier nur in dem von Weierstrass eingeführten Sinn benutzt werden.

Bestimmtheit für die Differentialgleichung sind, ist hiermit die *Existenz von Integralen* erwiesen.

Das sich nunmehr fühlbar machende Bedürfnis nach einer Übersicht über die Fülle der Integrale führt in Kap. IV zu der Definition eines *Fundamentalsystems von Integralen* und zu der Untersuchung der Eigenschaften eines solchen, woran sich die Zurückführung der Integration von *nicht homogenen linearen Differentialgleichungen* auf diejenige von homogenen anschliesst.

Durch Einführung des Begriffs eines Fundamentalsystems von Integralen gestaltet sich alsdann die Aufgabe der weiteren Untersuchung dahin, ein solches für die Umgebung jedes Wertes der unabhängigen Variablen zu ermitteln. Ihre Lösung für *reguläre Stellen* in Kap. V findet sogleich eine Anwendung auf die Integration der *linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten*. Von den unendlich vielen regulären Fundamentalsystemen gelangt man in Kap. VI zu dem Begriff des *monogenen Gebildes der Integralfunction* und zur Definition der *Gruppe der Differentialgleichung*.

Nunmehr muss sich die Untersuchung den *singulären Stellen* zuwenden, und zwar schliessen sich hinsichtlich der Einfachheit zunächst diejenigen *der Bestimmtheit* an die regulären Stellen an. Es wird sonach in Kapitel VII die *analytische Gestalt der Integrale* bei einer solchen Stelle ermittelt, wobei sich ergiebt, dass dieselben im allgemeinen mit Logarithmen behaftet sind, sich bestimmt verhalten und in bestimmter Weise in Gruppen sondern. In Kapitel VIII wird dann die Berechnung der logarithmenbehafteten Integrale nach einer Methode durchgeführt, die sich namentlich durch Benutzung einer erweiterten *Recursionsformel* eng an die Methoden von Kap. I, II, III anschliesst und ausserdem in Kapitel IX direkt zu einer Zerlegung der Integralgruppen in *Untergruppen* führt. Hat sich so gezeigt, dass sich bei einer Stelle der Bestimmtheit sämtliche Integrale bestimmt verhalten, so ist zur Ergänzung dieser Theorie der Beweis der *Umkehrung* dieses Satzes erwünscht, welcher in Kap. X erbracht wird.

Da bei *Stellen der Unbestimmtheit* die bisher benutzten Methoden versagen, muss ein Ersatz geschaffen werden, der sich in der *Fundamentalgleichung* (Kap. XI) darbietet. Mit ihrer Hülfe werden in Kap. XII bezüglich der *analytischen Gestalt der Integrale für die Umgebung einer beliebigen singulären Stelle* diejenigen Resultate wiedergefunden, die sich vorher mittelst der Recursionsformeln für Stellen der Bestimmtheit ergeben haben, — mit dem Unterschied natürlich, dass sich bei einer Stelle der Unbestimmtheit nicht sämtliche Integrale bestimmt verhalten können. Da es aber möglich ist, dass *bei einer Stelle der*

*Unbestimmtheit ein Teil der Integrale sich bestimmt verhält,* so erfordert dieser Fall in Kap. XIII eine besondere Behandlung, welche auch Gelegenheit bietet, auf die *Zerlegbarkeit* und *Reduktibilität* von linearen Differentialgleichungen einzugehen.

Endlich muss in Kap. XIV dem Verhalten der Integrale für *unendlich grosse Werte der unabhängigen Variablen* noch eine besondere Betrachtung gewidmet werden, wonach in Kap. XV die Aufstellung und kurze Untersuchung derjenigen *Differentialgleichungen, die im Endlichen und Unendlichen nur Stellen der Bestimmtheit besitzen,* den Abschluss des Ganzen bildet.

Die *Art der Darstellung* des vorstehend skizzierten Inhaltes verfolgt das Ziel, einerseits nach Möglichkeit zu vereinfachen und zusammenzuziehen, andererseits aber auch keine Lücken zu lassen, zu deren Ausfüllung weitergehende Kenntnisse aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich wären. Aus diesem Grunde glaubte sich der Verfasser zu einer gewissen Breite des Ausdrucks berechtigt; er hofft, dadurch dem Anfänger das Verständnis zu erleichtern. Dem gleichen Zweck sollen zahlreiche, den meisten Abschnitten beigefügte, möglichst einfache Beispiele dienen. Ebenso ist der dem Buch mitgegebene Anhang zur Bequemlichkeit des Lesers bestimmt. Er enthält solche Hülfssätze und -Betrachtungen, die nicht der Theorie der linearen Differentialgleichungen selbst angehören und in der Form, wie sie hier gebraucht werden, nicht unmittelbar aus leicht zugänglichen Büchern entnommen werden können. Durch die Fernhaltung dieses Materials aus dem Text des Buches und Verweisung in einen besonderen Anhang sollte vornehmlich einem schon vorgeschritteneren Leser gedient werden, der diese Hülfsbetrachtungen andernfalls zum Teil hätte überschlagen müssen, während sie mit Rücksicht auf den Anfänger wohl nicht ganz fortbleiben durften.

Was nun die *Quellen* anlangt, denen man die in dem vorliegenden Buch dargestellten Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen verdankt, so sind dies im wesentlichen die Abhandlungen von Fuchs, Frobenius, Hamburger, Thomé und anderen, nicht zu vergessen die Bemerkungen Riemann's in dessen Nachlass. Wo immer dem Verfasser bei der Bearbeitung eine von diesen Quellen vorgelegen hat, oder wo ihm auch nur nachträglich die zunächst im Interesse des einheitlichen Charakters des Ganzen möglichst unabhängig durchgeführte Entwicklung mit derjenigen bei anderen Autoren eine Verwandtschaft zu zeigen schien, wurde direkt auf die betreffende Stelle verwiesen. Gleichwohl ist es bei dem Charakter des Buches nicht nur nicht ausgeschlossen, sondern wohl unvermeidlich, dass in

manchen Fällen eine solche Verwandtschaft mit anderen Darstellungen unbemerkt geblieben ist, was von diesem Gesichtspunkt aus angesehen und entschuldigt werden möge. Am nächsten ihrer Art nach stehen der vorliegenden Arbeit vielleicht drei französische Publicationen, die deshalb, obwohl sie auch im Text citiert werden, schon hier genannt werden sollen; es sind dies

Tannery, Propriétés des équations différentielles linéaires à coefficients variables (Annales de l'école normale, 2me série, t. 4., 1875),

Floquet, Sur la théorie des éq. diff. lin. (Ebenda, t. 8 (1879) Supplément),

Fabry, Sur les intégrales des éq. diff. lin. à coefficients rationels (Thèse, Paris, 1885).

Nicht erforderlich dagegen erscheint es, diejenigen Resultate und Methoden besonders hervorzuheben, die der Verfasser als sein Eigentum betrachten zu dürfen glaubt. Dies ist für den Anfänger ohne Belang; der kundige Leser aber ist selbst in der Lage zu entscheiden, was er in dem Buche als originell gelten lassen will.

Endlich ist es dem Verfasser ein tiefempfundenes Bedürfnis, auch an dieser Stelle seinem lieben Freunde und einstigen Lehrer, Professor Dr. C. Koehler in Heidelberg, den herzlichsten Dank auszusprechen für die wahrhaft uneigennützige und eingehende Art und Weise, in der er ihn bei diesem Unternehmen von Anfang an mit Rat und That unterstützt hat. Auch Herrn Professor Dr. Franz Meyer in Clausthal, dem bereits die Druckbogen vorgelegen haben, ist der Verfasser für das thätige Interesse, das er seiner Arbeit entgegengebracht hat, zu Dank verpflichtet.

So möge das Buch seinen Weg in die Öffentlichkeit antreten und in den Kreisen der Lernenden und Lehrenden seinem Gegenstand Freunde erwerben! Möchte es insbesondere auch den Beifall desjenigen gewinnen, der freundlichst gestattete, ihm dasselbe als Zeichen tiefempfundener Dankbarkeit für die seit langen Jahren und bis in die Gegenwart fortdauernde wissenschaftliche Anregung und Förderung zuzueignen!

Giessen, im Dezember 1893.

**Lothar Heffter.**

# Inhaltsübersicht.

## Einleitung.



## Kapitel I.

### Recursionsformel und determinierende Gleichung.



## Kapitel II.

### Berechnung der Reihencoefficienten aus der Recursionsformel.



## Kapitel III.

### Nachweis der Reihenconvergenz bei einer Stelle der Bestimmtheit.

## Kapitel IV.

### Fundamentalsystem von Integralen. Nicht homogene Differentialgleichungen.



## Kapitel V.

### Die Integrale bei einer regulären Stelle und die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.



## Kapitel VI.

### Die Integralfunction im ganzen Gebiet der Differentialgleichung. Gruppe der Differentialgleichung.



## Kapitel VII.

### Analytische Gestalt der Integrale bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit.

## Kapitel VIII.

### Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen bei einer Stelle der Bestimmtheit.



## Kapitel IX.

### Zerlegung der Integralgruppen in Untergruppen.



## Kapitel X.

### Notwendigkeit der Bestimmtheitsgestalt der Differentialgleichung bei einer Stelle für bestimmtes Verhalten sämtlicher Integrale daselbst.



## Kapitel XI.

### Fundamentalgleichung.

## Kapitel XII.

### Die Integrale in einem Kreisring.



## Kapitel XIII.

### Stellen der Unbestimmtheit, bei denen sich ein Teil der Integrale bestimmt verhält. Reduktibilität.



## Kapitel XIV.

### Die Integrale in der Umgebung unendlich grosser Werte der unabhängigen Variablen.

## Kapitel XV.

### Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.



## Anhang.

### Hülfssätze.

## Berichtigungen.

S. 1. Z. 3 v. u. ist das Komma zu streichen.

„ 4. „ 1 v. o. ist der Hinweis auf Anm. [1]) zu streichen und Z. 4 hinter „*Differentialgleichung*“ anzufügen.

„ 9. „ 11 v. o. lies „Integrale“ statt „Integralen“.

„ 10. „ 10 v. u. lies „wann“ statt „wenn“.

„ 14. „ 9 v. o. lies „*bestehen*“ statt „*besteht*“.

„ 17. „ 9 v. u. sind die Worte „für $\varrho = n$ wird $x$ 0 reguläre Stelle“ als überflüssig zu streichen.

„ 22. „ 16 v. o. lies „Null“ statt „Nnll“.

„ 33. „ 14 v. u. ist das Wort „eine“ zu streichen.

„ 35. „ 2 v. u. lies „vom“ statt „von“.

„ 36. in Formel (2) lies $u^{(n)} . x^n$ statt $u^{(n)} . x''$.

„ 38. Z. 5 v. o. lies $\gamma_1$ statt $\gamma,$ .

„ 45. „ 12 v. u. lies „Frage“ statt „Frage“.

„ 46. „ 6 v. u. lies „Es existiert nun“.

„ 56. „ 21 v. o. lies in der Formel $C$ statt $C'$.

„ 60. „ 12 v. o. ist das Wort „sogenannten“ zu streichen.

„ 62. „ 18 v. o. lies „*Zahlen*“ statt „*Zahen*“.

„ 69. „ 16 v. o. lies „in“ statt „n“.

„ 91 letzte Zeile ist hinzuzufügen: „*Ist $\varrho$ eine negative ganze Zahl, so gilt der Satz für einen beliebigen Wert der Integrationsconstanten; andernfalls muss dieselbe gleich Null gesetzt werden.*“

„ 124. Z. 8 v. u. statt „Integralen der einzelnen Stufen“ lies „Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\log x$“.

„ 145 „ 4 v. o. lies „wie“ statt „die“.

„ 146. „ 12 v. o. ist hinter „gleich“ ein Komma zu setzen.

„ 176. in Formel (37) Zeile 3 lies $y_{2r_i}$ statt $y_{2r,i}$ .

„ 222. Anm. 2) lies „S. 154“ statt „S.“

„ 228. Z. 3 v. u. lies $C_{\alpha+\gamma-2}(a)$ statt $C_{\alpha+\gamma\ \ 2}(a)$

# Einleitung.

**1. Definition der linearen homogenen Differentialgleichung.** Bedeutet $x$ eine unabhängig veränderliche Grösse, $y$ eine unbekannte Function derselben und sind $y', y'', \ldots$ die Zeichen für die successiven Ableitungen von $y$ nach $x$, so nennt man jede Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0,$$

in deren linke Seite von jenen Zeichen $x$ und $y$ selbst nicht notwendig, dagegen mindestens eines der $y', y'', \ldots$ wirklich eintritt, eine *Differentialgleichung* und zwar eine *gewöhnliche Differentialgleichung,* weil nur gewöhnliche Differentialquotienten darin vorkommen. $x$ heisst die *unabhängige,* $y$ die (vermittelst der Differentialgleichung von jener) *abhängige Variable.* Enthält die Gleichung ausser $x$ noch andere veränderliche Grössen, von denen $y$ mithin auch abhängen wird, ohne dass jedoch nach diesen Veränderlichen genommene Ableitungen von $y$ in der Gleichung vorkommen, so nennt man dieselben *Parameter der Differentialgleichung.*

Ist $y^{(n)}$ die Ableitung *höchster* Ordnung, welche in $F$ vorkommt, so sagt man, die Differentialgleichung sei *von der $n^{ten}$ Ordnung.* Ist $F = 0$ eine *algebraische Differentialgleichung,* d. h. lässt sich die linke Seite in die Gestalt einer ganzen rationalen Function von $y, y' \ldots y^{(n)}$ bringen, so spricht man noch von dem *Grad der Differentialgleichung* und versteht darunter den Grad jener ganzen Function in den genannten Grössen.

Unter den gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung sind nun die einfachsten diejenigen vom *ersten Grade* oder die *gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen,* d. h. Differentialgleichungen von der Form

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y + p(x) = 0,$$

worin $p_0, p_1, \ldots, p_n$ und $p$ irgend welche gegebene Functionen von $x$ sind, und die *Coefficienten der Differentialgleichung* heissen. Fehlt insbesondere der von $y$ und seinen Ableitungen freie Teil $p(x)$, so nennt man die lineare Differentialgleichung *homogen.* Da nun, wie sich

später zeigen wird, die Untersuchung der *nicht* homogenen stets auf diejenige von homogenen linearen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, so brauchen nur die letzteren den Gegenstand unseres Studiums zu bilden, also die Gleichungen der Form

$$(1) \qquad p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x)y = 0.$$

2. **Die Coefficienten der Differentialgleichung.** Der individuelle Charakter einer linearen homogenen Differentialgleichung wird also, abgesehen von der Ordnungszahl $n$, nur durch die Natur der Coefficienten $p_0, p_1 \ldots p_n$ bestimmt. Es ist deshalb erforderlich, um den Gegenstand unserer Untersuchung genau zu bezeichnen, zuvor noch die Voraussetzungen anzugeben, welche bezüglich der Coefficienten $p_0, p_1 \ldots p_n$ gelten sollen. Für die unabhängige Variable $x$, welche an sich in ihrem Wertbereich völlig unbeschränkt sein soll, also alle reellen und complexen Werte annehmen kann, bedienen wir uns dabei unter Benützung der geometrischen Darstellung complexer Grössen in einer Ebene der geometrischen Ausdrucksweise, sprechen also von der $x$-Ebene, von Punkten, Curven, Flächenstücken in dieser u. s. w.

Jede der Functionen $p_0, p_1 \ldots p_n$ ist nun durch die Art, wie sie gegeben ist, entweder für die ganze $x$-Ebene oder nur für einen bestimmten Teil derselben definiert. Auch in dem Falle aber, dass nicht alle Coefficienten $p_0, p_1 \ldots p_n$ für die ganze $x$-Ebene definiert sind, können wir annehmen, dass es *ein und nur ein zusammenhängendes Gebiet* $G$ in der $x$-Ebene giebt, für welches alle $n+1$ Coefficienten gleichzeitig definiert sind. Gäbe es nämlich gar kein solches Gebiet, so wäre dies gleichbedeutend damit, dass überhaupt keine Differentialgleichung vorgelegt wäre. Giebt es aber mehrere, von einander getrennte Gebiete der gedachten Art, $G_1, G_2, \ldots$, so wird sich später (Kap. VI) zeigen, dass dann für jedes derselben eine besondere Untersuchung angestellt werden muss, dass es sich dann also gerade so verhält, als ob *eine* Differentialgleichung vorgelegt wäre, deren Coefficienten für $G_1$, eine *andere*, deren Coefficienten für $G_2$ definiert sind, u. s. w. Wir wollen den zusammenhängenden Bereich, für den sämtliche Coefficienten $p$ gleichzeitig definiert sind, das *Gebiet der Differentialgleichung* nennen. Dieses umfasst also entweder die ganze $x$-Ebene oder einen solchen Theil derselben, in welchem man von jedem beliebigen Punkt nach jedem beliebigen andern Punkt gelangen kann, ohne die Begrenzung zu überschreiten. Die *unendlich grossen* Werte von $x$ können zum Gebiet der Differentialgleichung gehören oder davon ausgeschlossen sein. Uebrigens kann man dieselben durch Ausführung der Transformation

$$x = \frac{1}{x'}$$

für die unabhängige Variable in endliche Werte des Gebietes der transformierten, abermals linearen homogenen Differentialgleichung verwandeln, worauf wir später eingehend zurückkommen werden.

Da es sich nun hier blos um eine Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen handelt, wollen wir die beschränkende Annahme machen, dass *die Coefficienten $p_0, p_1, \ldots p_n$ in dem ganzen Gebiet der Differentialgleichung eindeutige, endliche und stetige analytische Functionen sind* oder nach Befreiung von einem ihnen allen anhaftenden und darum unwesentlichen gemeinsamen Factor, den wir jetzt immer schon entfernt denken wollen, diese Eigenschaften erhalten. Die Functionen $p_0, p_1 \ldots p_n$ sollen sich also nach der Weierstrass-schen Ausdrucksweise in dem ganzen Gebiet der Differentialgleichung *regulär verhalten* und sind nach dem Cauchy'schen Fundamentalsatz[1]) in der Umgebung eines jeden Punktes $x = a$ im Innern des Gebietes als gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ (die nur positive ganze Potenzen von $x - a$ enthalten) darstellbar.

**3. Die singulären Punkte der Differentialgleichung.** Dividiert man die ganze Differentialgleichung (1) durch den Coefficienten von $y^{(n)}$

$$(2) \qquad y^{(n)} + \frac{p_1}{p_0} y^{(n-1)} + \cdots + \frac{p_n}{p_0} y = 0,$$

so sind auch die Coefficienten der so transformierten Differentialgleichung (2) regulär in der Umgebung aller Punkte im Innern des Gebietes der Differentialgleichung mit Ausnahme derjenigen, wo $p_0(x)$ verschwindet, weil dort mindestens einer der Coefficienten von (2) unendlich wird. Die ersteren wollen wir deshalb *reguläre*, die letzteren *singuläre Stellen der Differentialgleichung* nennen. Nach der für die Functionen $p_0, p_1 \ldots p_n$ geltenden Voraussetzung kann man aber auch in der Umgebung einer solchen singulären Stelle $x = a$ jeden der Quotienten

$$\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0}$$

nach dem Cauchy'schen Satz wieder als Potenzreihe von $x - a$ darstellen, die nur ganze Potenzen und höchstens eine *endliche* Anzahl negativer Potenzen enthält. $x = a$ ist also für diejenigen dieser Quotienten, die dort unendlich werden, nach der Weierstrass'schen Be-

1) Vgl. z. B. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques. II. Éd. Paris 1875. p. 149.

zeichnung nur eine *ausserwesentlich singuläre Stelle*[1]). Deshalb sollen diejenigen Stellen, welche im Gebiet der Differentialgleichung liegen, für die aber $p_0(x)$ verschwindet, *ausserwesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung* und im Gegensatz hierzu alle Punkte der $x$-Ebene, welche dem Gebiet der Differentialgleichung nicht angehören, *wesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung*[1]) heissen.

Nunmehr wollen wir jedem endlichen Punkte der $x$-Ebene in Bezug auf die Differentialgleichung eine gewisse *Umgebung* zuordnen. Bei einer regulären und ausserwesentlich singulären Stelle $x = a$ sei dies das Innere des *Kreises* mit dem Mittelpunkt $a$, der durch den diesem Punkt am nächsten liegenden singulären Punkt der Differentialgleichung hindurchgeht. Die Umgebung einer wesentlich singulären Stelle $x = a$ dagegen sei das Innere eines *Kreisringes* mit dem Mittelpunkte $a$ und so beschaffen, dass er vom Mittelpunkt $a$ aus gerechnet der erste Kreisring von endlicher Radiendifferenz ist, der keinen singulären Punkt enthält, der also ganz dem Gebiet der Differentialgleichung angehört. Giebt es in unendlicher Nähe von $x = a$ keinen andern singulären Punkt, wie z. B. bei der Function $e^{\frac{1}{x}}$ in der Nähe von $x = 0$, so kann der Radius des inneren Begrenzungskreises jenes Ringes beliebig klein genommen werden, während derjenige des äusseren Begrenzungskreises wie bei einer regulären oder ausserwesentlich singulären Stelle bestimmt ist.

Es liegt auf der Hand, dass es wesentlich singuläre Stellen geben kann, für die eine Umgebung von endlicher Ausdehnung *nicht* existiert. Besitzt aber die wesentlich singuläre Stelle $x = a$ eine (endliche) Umgebung, so kann man innerhalb derselben nach dem Laurent'schen Satz[2]) jeden der Quotienten

$$\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0}$$

in eine Potenzreihe von $x - a$ entwickeln, welche aber *unendlich viele negative Potenzen* enthält. Hiermit rechtfertigt sich nachträglich — abermals durch die Uebereinstimmung mit der Weierstrass'schen Namengebung — die Bezeichnung der nicht zum Gebiet der Differentialgleichung gehörenden Punkte als wesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung.

---

1) Dieselben Namen haben bei Fuchs eine andere Bedeutung. Vgl. Crelles Journ. Bd. 68. (1868). S. 378 und Artikel 34.

2) Vgl. Briot et Bouquet, Th. d. f. ell. p. 158.

Fassen wir die vorangehende Erörterung kurz zusammen, so lautet ihr Inhalt:

*Wir unterscheiden reguläre, ausserwesentlich singuläre und wesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung* (1) *oder* (2). *Die Gesamtheit der beiden ersteren zusammen bildet das Gebiet der Differentialgleichung. Die ausserwesentlich singulären Punkte sind die Nullstellen von* $p_0(x)$. *Jedem Punkt der $x$-Ebene ist eine Umgebung zugeordnet, welche bei den Stellen der beiden ersten Arten ein Kreis ist, bei der dritten Art ein Kreisring, dessen Flächeninhalt auch Null sein kann. Die Coefficienten der Differentialgleichung in der Gestalt* (2) *sind, sobald eine Umgebung von $x = a$ existiert, nach ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelbar. Ist $x = a$ regulär, so enthalten alle diese Reihen nur positive Potenzen; ist $x = a$ ausserwesentlich singulär, so kommen auch negative Potenzen vor, jedoch nur in endlicher Anzahl; ist $x = a$ wesentlich singulär, so enthält mindestens eine der Reihen unendlich viel negative Potenzen.*

**4. Ziel der Untersuchung.** Nachdem im Vorstehenden der Gegenstand unserer Untersuchung genau festgelegt worden ist, tritt nun die Frage an uns heran, was als *Ziel* derselben zu bezeichnen ist.

Eine Differentialgleichung legt uns, gerade wie eine algebraische Gleichung, das Problem vor, die in der Gleichung enthaltene *unbekannte Grösse* zu ergründen. In unserm Fall handelt es sich also um eine Grösse $y$, welche so als Function von $x$ zu bestimmen ist, dass sie die Differentialgleichung *erfüllt* oder *befriedigt* und zwar *identisch*, d. h. wenn sie in die Gleichung eingesetzt ist, soll deren linke Seite, die ja dann formal nur noch von der Variablen $x$ abhängt, thatsächlich auch von dieser unabhängig und gleich Null sein. Eine Function $y$ von $x$ mit dieser Eigenschaft nennt man ein *Integral der Differentialgleichung*, ihre Ermittelung die *Integration der Differentialgleichung*. Diese Bezeichnungen haben ihren Ursprung darin, dass das Problem einer Differentialgleichung eine Verallgemeinerung des Problems der Integralrechnung oder besser umgekehrt dieses nur ein sehr specieller Fall von jenem ist.

Der Inhalt dessen, was man unter *Integration einer Differentialgleichung* versteht, hat aber im Laufe der Zeit eine erhebliche Wandlung erfahren. Wie man bei den algebraischen Gleichungen zunächst nach *Auflösung*, d. h. nach einem Ausdruck der Wurzeln durch die Coefficienten vermittelst bekannter Functionszeichen trachtete, hierbei bald auf Schwierigkeiten stiess, zweifelhaft wurde, die Existenz der Wurzeln erst beweisen musste (Gauss), aber nicht viel später auch die Unmöglichkeit, dieselben allgemein durch bekannte Functions-

zeichen zu erhalten, entdeckte (Abel) — ganz ähnlich hier! Man suchte zunächst unter den bis dahin bekannten Functionen nach solchen, welche die Differentialgleichung erfüllten. War dies unmöglich, so trachtete man, die Lösung auf *Quadraturen* zurückzuführen, d. h. auf Differentialgleichungen ersten Grades und erster Ordnung von der Gestalt $\frac{dy}{dx} = f(x)$, — eine rein formale Verschiebung der Schwierigkeit. Da es aber nicht an Fällen mangelte, wo weder das Eine noch das Andere gelang, warf sich auch hier von selbst die Frage auf: „*Giebt es denn überhaupt immer ein Integral?*“, eine Frage, die von Cauchy [1]) in wesentlich bejahendem Sinn beantwortet wurde. Und als Gegenstück zum Abel'schen Satz in der Algebra könnte man hier einen Beweis von Liouville [2]) gelten lassen, wonach das elliptische Integral erster Gattung nicht durch die bekannten Functionen ausdrückbar, mit andern Worten also die entsprechende Differentialgleichung erster Ordnung im alten Sinn des Wortes nicht integrierbar ist.

So wurde die Stellung zum Differentialgleichungs-Problem eine wesentlich neue. Wie man in der Algebra heute nur noch fragt: „welches sind die Eigenschaften der durch eine bestimmte algebraische Gleichung definierten algebraischen Zahl?“, so hier: „*Welches sind die Eigenschaften der Function, die durch eine bestimmte Differentialgleichung definiert wird?*“ Während früher vorzugsweise *die* Differentialgleichungen interessierten, die man im damaligen Sinne integrieren konnte, ist es jetzt gerade umgekehrt. Wo wir bekannte explicite Functionsausdrücke *haben*, ziehen wir diese natürlich vor und werfen die Differentialgleichung als unnütz gewordene Schale bei Seite; wo das aber nicht der Fall, da ist uns die Differentialgleichung selbst das einzige Mittel zur Bestimmung der ihr genügenden Function.

Wenden wir diese allgemeine Betrachtung auf den vorliegenden Fall an, so ist die Aufgabe, welche uns eine lineare homogene Differentialgleichung stellt, hiernach *die functionentheoretische Untersuchung des Integrals, bezw. der Integrale auf Grund der Daten der Differentialgleichung.*

Diese Untersuchung ist zu eröffnen mit dem *Nachweis der Existenz von Integralen.* Ist derselbe geführt, so sind Methoden zu entwickeln, welche sowohl — wenn dies möglich ist — die *Berechnung der Integralwerte für die Werte von $x$ im Gebiet der Differentialgleichung* gestatten, als auch Aufschluss geben über das *analytische Verhalten der Integrale in der Umgebung aller regulären und singulären Punkte.* Hierbei

1) Vgl. z. B. Briot et Bouquet, Th. d. f. ell. p. 325 u. ff.

2) Journ. de l'École Polytechnique, Cah. 23. (1834.) p. 37 ff.

wird sich sehr bald schon eine *weitere Unterscheidung unter den singulären Punkten* als nötig erweisen: wir werden nämlich finden, dass in gewisser Hinsicht *die regulären Stellen mit den ausserwesentlich singulären von bestimmter Art einerseits den übrigen ausserwesentlich singulären und den wesentlich singulären Stellen andererseits* gegenüberstehen, sodass sich auch die Untersuchung entsprechend diesen beiden Arten von Punkten gabelt. Den Schluss soll eine kurze Betrachtung *derjenigen Differentialgleichungen bilden, welche nur Stellen der ersten Art besitzen.*

## Kapitel I.

### Recursionsformel und determinierende Gleichung.

**5. Feststellung der ersten Aufgaben.** Nach den einleitenden Erörterungen ist die erste Aufgabe der *Nachweis der Existenz von Integralen* der vorgelegten Differentialgleichung

$$(1) \qquad P(x, y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0.$$

Darauf zielen deshalb auch unsere nächsten Schritte hin.

Sei $x = 0$ eine *ganz beliebige Stelle*, regulär oder singulär, jedoch *mit einer endlichen Umgebung*. Was dann hier und im Folgenden zur Vereinfachung der Formeln von $x = 0$ gesagt wird, gilt natürlich für jede beliebige Stelle $x = a$ von derselben Beschaffenheit; man kann ja durch die einfache Transformation

$$x = a + x'$$

diesen Fall auf jenen zurückführen.

Da nun in der Umgebung von $x = 0$ die Coefficienten $p_0, p_1, \ldots p_n$ der Differentialgleichung nach ganzen Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen sind, liegt es nahe, auch die Integrale, d. h. die Functionen, welche für $y$ in (1) substituiert, diese erfüllen, in der *Gestalt von Reihen* zu suchen, *die nach Potenzen von $x$ fortschreiten.*

Hierbei zeigt zunächst eine einfache Ueberlegung, dass man nur solche Reihen in's Auge zu fassen braucht, deren sämtliche Exponenten (der Potenzen von $x$) sich untereinander nur um *ganze* Zahlen unterscheiden. Genügt nämlich der Differentialgleichung (1) eine Reihe $\eta$, bei der diese Eigenschaft nicht besteht, so kann man $\eta$ zerlegen in eine Summe mehrerer Reihen

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \cdots,$$

sodass etwa $\eta_1$ nur Potenzen enthält, deren Exponenten von $\alpha_1$, $\eta_2$ nur solche, deren Exponenten von $\alpha_2$, u. s. w. nur um ganze Zahlen verschieden sind, während keine der Differenzen zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ganzzahlig oder Null ist. Da nun

$$P(x, \eta) = P(x, \eta_1) + P(x, \eta_2) + \cdots,$$

ist für das identische Verschwinden von $P(x, \eta)$ erforderlich, dass einzeln

$$P(x, \eta_1) = 0, \quad P(x, \eta_2) = 0, \ldots;$$

denn, da die Coefficienten $p_0, p_1 \ldots p_n$ nur ganze Potenzen enthalten, treten in jedem der letzteren Ausdrücke nur solche Potenzen von $x$ auf, die in keinem der übrigen vorkommen. Damit also die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $x$ Null sind, wie es das identische Verschwinden von $P(x, \eta)$ erfordert, müssen jene Ausdrücke einzeln identisch verschwinden, d. h. $\eta_1, \eta_2, \ldots$ müssen selbst Integrale sein. Ein Integral $\eta$, bei dem unsere oben ausgesprochene Behauptung nicht erfüllt ist, lässt sich also stets als Summe mehrerer Integralen darstellen, bei deren jedem sie erfüllt ist.

Die Reihen, durch welche wir versuchen wollen, der Differentialgleichung (1) zu genügen, sind daher in der Form

(2) $$\eta = x^{\alpha} \sum_{(k)} c_k x^k$$

anzusetzen, wobei $\alpha$ eine ganz beliebige, reelle oder complexe Zahl ist und $k$ nur *ganzzahlige* Werte durchläuft. Es ist natürlich keineswegs ausgeschlossen, dass $k$ dabei auch negative ganzzahlige Werte, ja sogar unendlich viele solche durchlaufen kann. Allein, wenn man nun (2) in die Differentialgleichung (1) substituiert und dann die Coefficienten $c_k$ der Reihe (2) und $\alpha$ so zu bestimmen sucht, dass alle Coefficienten von $x$ in dem Ergebnis jener Substitution verschwinden (*Methode der unbestimmten Coefficienten*), so zeigt sich bald, dass die Ausführung dieser Aufgabe — wenigstens mit elementaren Hülfsmitteln — unmöglich ist, sowohl wenn $k$ in (2) auch unendlich viele negative Werte annimmt, als auch, wenn einer der Coefficienten $p_0, p_1 \ldots p_n$ unendlich viele negative Potenzen enthält.

Es ist daher eine *notwendige Beschränkung*, wenn wir nunmehr annehmen, $x = 0$ *sei nicht wesentlich singuläre Stelle* oder $x = 0$ *gehöre dem Gebiet der Differentialgleichung an*, sodass in der Umgebung von $x = 0$ (1) so geschrieben werden kann, dass die Coefficienten keine negativen Potenzen von $x$ enthalten. Wir setzen die Gleichung — wie bald ersichtlich sein wird, zur Vereinfachung der folgenden Formeln — insbesondere in die Gestalt

(3) $$P(x, y) = x^n \cdot \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + x \mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_0\ \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind und für $x = 0$ nicht sämtlich verschwinden. Die in dieser Weise eindeutig bestimmte

Gestalt (3) der Differentialgleichung wollen wir deren *Normalform bei* $x = 0$ [1]) nennen.

Es ist ferner geboten, — weil, wie schon ausgesprochen wurde, im entgegengesetzten Fall der Erfolg ausgeschlossen ist — nur nach solchen Reihen

$$\eta = \sum_{(k)} c_k x^k \qquad (k = \alpha, \alpha + 1, \ldots) \tag{4}$$

zu fragen, wo der absolute Betrag von $\alpha$ — den wir nach Weierstrass mit $|\alpha|$ bezeichnen — eine *endliche* Grösse ist. Wir wollen von einer solchen Reihe (4), deren Anfangscoefficient $c_\alpha \gtrless 0$ ist, sodass die Reihe thatsächlich genau mit $x^\alpha$, nicht erst mit einer höheren Potenz beginnt, sagen, „sie *gehöre zu der Zahl oder zu dem Exponenten* $\alpha$“ oder kurz „*zu* $\alpha$“. Gleichzeitig wollen wir sagen „*die Reihe* $\eta$ *verhält sich bei* $x = 0$ *bestimmt*“, weil sie mit der bestimmten endlichen Potenz $x^{-\alpha}$ multipliciert für $x = 0$ einen *bestimmten, endlichen, von Null verschiedenen Wert* annimmt.

Unsere *erste Hauptaufgabe* ist daher *die Aufsuchung aller Integrale in Reihenform, welche sich bei der beliebigen, dem Gebiet der Differentialgleichung angehörigen Stelle* $x = 0$ *bestimmt verhalten.*

Diese Aufgabe wird in den drei ersten Kapiteln behandelt. In dem gegenwärtigen ersten Kapitel werden die Gleichungen aufgestellt, denen die *Coefficienten* $c_k$ der Reihe (4) zu genügen haben, wobei sich auch eine Gleichung ergiebt, deren Wurzel der *Anfangsexponent* $\alpha$ sein muss. Im zweiten Kapitel wird ermittelt, *welche* Wurzeln jener Gleichung thatsächlich Anfangsexponenten von einer Reihe (4) sein können. Im dritten Kapitel endlich wird gezeigt, wenn die aufgestellten Reihen *convergieren*, also *Integrale* darstellen.

**6. Die Recursionsformel.** Zur Berechnung der Coefficienten $c$ der Reihe (4) müssen wir diese und ihre $n$ ersten Ableitungen in (3) einsetzen und den entstehenden Ausdruck identisch zu Null machen. Zu dem Ende bezeichnen wir den Summationsbuchstaben in $\eta$ jetzt mit $s$ und haben also

$$\eta = \sum_{(s)} c_s x^s \qquad (s = \alpha, \alpha + 1, \ldots),$$

$$\frac{d^\mu \eta}{dx^\mu} = \eta^{(\mu)} = \sum_{(s)} s(s-1)\ldots(s-\mu+1)\, c_s x^{s-\mu}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

---

1) S. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. (1875.) S. 319.

Um auch in der Differentialgleichung (3) die Reihenform der Coefficienten sichtbar zu machen, schreiben wir

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_{(\lambda)} \mathfrak{p}_{\nu\lambda} x^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, 2, ..)$$
$$(\nu = 0, 1, .., n)$$

wo

$$\mathfrak{p}_{\nu\lambda} = \frac{\mathfrak{P}_\nu^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}.$$

Dann wird

$$(5)\qquad P(x, \eta) = \sum_\lambda \mathfrak{p}_{0\lambda} \sum_s s(s-1)..(s-n+1) c_s x^{s+\lambda}$$
$$+ \sum_\lambda \mathfrak{p}_{1\lambda} \sum_s s(s-1)..(s-n+2) c_s x^{s+\lambda}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+ \sum_\lambda \mathfrak{p}_{n\lambda} \sum_s c_s x^{s+\lambda}$$

oder, wenn man die rechte Seite als dreifache Summe schreibt,[1])

$$(5^a)\qquad P(x, \eta) = \sum_\nu \sum_\lambda \sum_s \mathfrak{p}_{\nu\lambda} s(s-1)..(s-n+\nu+1) c_s x^{s+\lambda}$$
$$\begin{pmatrix} s = \alpha, \alpha+1, .. \\ \lambda = 0, 1, 2, .. \\ \nu = 0, 1, .., n \end{pmatrix},$$

wobei das Produkt $s(s-1)..(s-n+\nu+1)$ für $\nu = n$ natürlich $= 1$ zu setzen ist. Damit nun $P(x, \eta) = 0$ werde, muss der Ausdruck (5) oder ($5^a$) nach Potenzen von $x$ geordnet und dann der Coefficient jeder einzelnen Potenz gleich Null gesetzt werden.

Zu dem Ende setzen wir

$$s + \lambda = k, \quad \lambda = k - s$$

und erhalten

$$(5^b)\qquad P(x, \eta) = \sum_\nu \sum_s \sum_k \mathfrak{p}_{\nu, k-s} s(s-1)..(s-n+\nu+1) c_s x^k,$$

wo

$$k = \alpha, \alpha+1, \alpha+2, ...$$
$$s = \alpha, \alpha+1, ..., k,$$

1) Lässt man die Summation über $s$ fort und ersetzt $c_s$ durch 1, so hat man also in dem sich ergebenden Ausdruck das Resultat der Substitution von $x^s$ für $y$ in (3). Diese Function von $x$ nennt Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80, S. 318, *die charakteristische Function der Differentialgleichung.*

da für $s > k$ $\mathfrak{p}_{\nu,\, k-s}$ seine Bedeutung verliert, also $\equiv 0$ zu setzen ist, und

$$\nu = 0,\ 1, \ldots n.$$

Der Coefficient einer beliebigen Potenz $x^k$ in $P(x, \eta)$ ist daher

(6) $$F_{k\alpha} \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{s=\alpha}^{s=k} \mathfrak{p}_{\nu,\, k-s}\, s(s-1)\ldots(s-n+\nu+1)\, c_s$$

oder

(6ª) $$F_{k\alpha} \equiv a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\,\alpha+1} c_{\alpha+1} + \cdots + a_{kk} c_k,$$

wenn

(7) $$a_{ks} \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \mathfrak{p}_{\nu,\, k-s}\, s(s-1)\ldots(s-n+\nu+1)$$

gesetzt wird. Mit Hülfe dieser abkürzenden Bezeichnungen ist also

(5ᶜ) $$P(x, \eta) \equiv \sum_{(k)} F_{k\alpha} x^k \qquad (k = \alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2, \ldots)$$

und

(8) $$F_{k\alpha} \equiv a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\alpha+1} + \cdots + a_{kk} c_k = 0$$
$$(k = \alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2, \ldots)$$

ein System von Gleichungen, welchem die Coefficienten $c$ genügen müssen, damit Gleichung (3) durch (4) identisch erfüllt wird. Weil Formel (8) aber jedes $c_k$, sobald $a_{kk} \neq 0$, durch die vorangehenden $c$ ausdrückt, nennt man sie die Recursionsformel der Coefficienten $c$ oder der Reihe (4) oder auch *die zu $x = 0$ gehörige Recursionsformel der Differentialgleichung* (3).

Wir fassen daher den Inhalt dieses Artikels dahin zusammen:

*Die Coefficienten $c$ einer sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltenden Reihe*

$$\eta \equiv \sum_{(k)} c_k x^k \qquad (k = \alpha,\ \alpha+1, \ldots),$$

*welche der Differentialgleichung* (3) *bei der ihrem Gebiet angehörigen Stelle $x = 0$ genügen soll, müssen der Recursionsformel*

$$F_{k\alpha} \equiv a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\,\alpha+1} c_{\alpha+1} + \cdots + a_{kk} c_k = 0$$

*oder dem aus dieser für $k = \alpha,\ \alpha+1, \ldots$ entspringenden Gleichungssystem genügen.*

**7. Die determinierende Gleichung.** Wir haben bis jetzt noch nicht hervorgehoben, dass wir mit der Recursionsformel zugleich auch schon eine Gleichung gewonnen haben, welcher der Anfangsexponent $\alpha$ der Reihe $\eta$ genügen muss. Bildet man nämlich die Recursionsformel (8) für $k = \alpha$, so reduciert sich dieselbe auf

$$a_{\alpha\alpha} \cdot c_\alpha = 0.$$

Damit also die Reihe mit der Potenz $x^\alpha$ beginne, wozu erforderlich ist, dass $c_\alpha \neq 0$, muss

$$a_{\alpha\alpha} = 0$$

sein. Der Anfangsexponent $\alpha$ einer Reihe $\eta$ muss also eine Wurzel der algebraischen Gleichung in $k$

$$a_{kk} = 0$$

sein, deren linke Seite wir gelegentlich auch durch $F(k)$

$$F(k) \equiv a_{kk}$$

bezeichnen. Wegen dieser Eigenschaft nennt man

$$a_{kk} \equiv F(k) = 0$$

*die zu der Stelle $x = 0$ gehörige determinierende Gleichung*[1], $a_{kk} \equiv F(k)$ *die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function.*

Der explicite Ausdruck dieser determinierenden Function ist nach (7)

$$(9) \qquad a_{kk} \equiv F(k) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \mathfrak{p}_{\nu 0}\, k(k-1)\,..\,(k-n+\nu+1),$$

also, da $\mathfrak{p}_{\nu 0}$ die Anfangscoefficienten der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ in (3) sind, aus der Differentialgleichung selbst unmittelbar abzulesen.

Wir haben daher das Resultat:

*Der Anfangsexponent $\alpha$ einer Reihe $\eta$, welche der Differentialgleichung* (3) *genügen soll, muss eine Wurzel der determinierenden Gleichung*

$$a_{kk} \equiv F(k) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \mathfrak{P}_\nu(0)\, k(k-1)\,..\,(k-n+\nu+1) = 0$$

*sein.*

**8. Grad der determinierenden Gleichung; Stelle der Bestimmtheit.** Die determinierende Function ist nach Vorstehendem eine ganze rationale Function von $k$, deren Grad zwischen 0 und $n$ variieren kann.

Ist der Grad $= 0$, so besitzt die Gleichung gar keine endliche Wurzel; folglich existiert gar kein Integral unserer Differentialgleichung, das bei $x = 0$ die Gestalt einer sich daselbst bestimmt verhaltenden Reihe (4) hat. Dieser Fall tritt offenbar dann ein, wenn $\mathfrak{p}_{n0}$ der einzige von Null verschiedene unter den Coefficienten $\mathfrak{p}_{\nu 0}$ $(\nu = 0, 1, .., n)$ ist.

1) Diese Bezeichnung hat Frobenius eingeführt (Crelles Journ. Bd. 80. S. 318.) — Fuchs nennt dieselbe Gleichung *determinierende Fundamentalgleichung* (Crelles Journ. Bd. 68. S. 367). — Thomé nennt die Differenz zwischen $n$ und dem Grad der determinierenden Gleichung (s. Art. 8) den *charakteristischen Index* (Crelles Journ. Bd. 75. S. 267).

Von besonderer Wichtigkeit ist der entgegengesetzte extreme Specialfall, dass der Grad der determinierenden Gleichung $n$ — gleich der Ordnung der Differentialgleichung — ist. Dieser tritt nach (9) dann und nur dann ein, wenn

$$\mathfrak{p}_{00} \neq 0,$$

d. h. wenn die Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ in (3) für $x = 0$ nicht verschwindet.

*Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function von demselben Grad sei wie die Ordnung der Differentialgleichung, besteht also darin, dass bei $x = 0$ die Differentialgleichung in die Form*

$$(10) \qquad x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + x \mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0$$

*gebracht werden kann, wo $\mathfrak{P}_0\ \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ keine negativen Potenzen von $x$ enthalten und $\mathfrak{P}_0$ insbesondere mit einem von Null verschiedenen constanten Glied beginnt.*

In (10) kann man natürlich auch durch $\mathfrak{P}_0$ dividieren und jeden der Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{P}_0},$$

da $\mathfrak{P}_0$ mit einem von Null verschiedenen constanten Glied beginnt, wieder in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickeln. An Stelle von (10) kann daher auch ebenso gut die Form der Differentialgleichung

$$(10') \qquad x^n y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{P}_n \,.\, y = 0$$

gesetzt werden.

Wir wollen eine Stelle $x = 0$, deren determinierende Function den Grad $n$ hat, und bei der daher die Differentialgleichung die Gestalt (10) oder (10') annehmen kann, aus später ersichtlichen Gründen eine *Stelle der Bestimmtheit* nennen, alle übrigen Stellen, welche jener Bedingung nicht genügen, *Stellen der Unbestimmtheit.* Zu den ersteren gehören insbesondere *die regulären Stellen.* Ist nämlich $x = 0$ eine solche und wäre $\mathfrak{p}_{00} = 0$, so müsste ja einer der Coefficienten $\mathfrak{p}_{\nu 0} (\nu = 1, 2, \ldots, n) \neq 0$ sein (s. Gl. (3)). Dann würde aber nach Division der Gleichung durch den Coefficienten von $y^{(n)}$ mindestens ein Coefficient für $x = 0$ unendlich werden. Zu den Stellen der Unbestimmtheit gehören alle *wesentlich singulären Stellen*, weil bei ihnen die Form (3) und daher auch (10) der Differentialgleichung ausgeschlossen ist. Die *ausserwesentlich singulären Stellen* können Stellen der Bestimmtheit oder der Unbestimmtheit sein.

**9. Specialisierung für reguläre Stellen.** Ist $x = 0$ eine *reguläre* Stelle der Differentialgleichung, so können wir die Gleichung in die Gestalt setzen

$$(11)\qquad \mathfrak{Q}_0 y^{(n)} + \mathfrak{Q}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{Q}_n y = 0,$$

wo $\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind und $\mathfrak{Q}_0(0) \neq 0$ ist. Um diese Gleichung in die Normalform zu bringen, multiplicieren wir sie mit $x^n$ und haben dann, verglichen mit (3),

$$(12)\qquad x^\nu \mathfrak{Q}_\nu = \mathfrak{P}_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Setzt man also

$$(13)\qquad \mathfrak{Q}_\nu = \sum_\lambda \frac{\mathfrak{Q}_\nu^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} x^\lambda = \sum_\lambda \mathfrak{q}_{\nu\lambda} x^\lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist nach (12)

$$(14)\qquad \mathfrak{p}_{\nu\lambda} = \mathfrak{q}_{\nu,\lambda-\nu}$$

für $\nu \geqq \lambda$, während für $\nu < \lambda$ $\mathfrak{p}_{\nu\lambda} = \mathfrak{q}_{\nu,\lambda-\nu} = 0$ ist. Die zu der regulären Stelle $x = 0$ gehörige Recursionsformel lautet daher nach (6) und (8) in der Bezeichnung der Gleichung (11)

$$(15)\qquad F_{k\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{s=\alpha}^{s=k} \mathfrak{q}_{\nu,k-s-\nu}\, s(s-1)\ldots(s-n+\nu+1)\, c_s = 0.$$

Die determinierende Gleichung ist aber nach (9) und (14)

$$(16)\qquad \mathfrak{q}_{00}\, s(s-1)\ldots(s-n+1) = 0$$

und hat die Wurzeln $0, 1, \ldots, n-1$. Setzt man daher in (15) für $\alpha$ die kleinste dieser Wurzeln, $\alpha = 0$, ein, so bemerkt man, dass für $s = 0, 1, \ldots, n-\nu-1$ das Produkt $s(s-1)\ldots(s-n+\nu+1)$ und für $s > k-\nu$ die Grösse $\mathfrak{q}_{\nu,k-s-\nu}$ verschwindet. Daher braucht man über $s$ nur von $s = n-\nu$ bis $s = k-\nu$ zu summieren. Die für die kleinste Wurzel $\alpha = 0$ der determinierenden Gleichung gebildete Recursionsformel bei der regulären Stelle $x = 0$ der Differentialgleichung (11) lautet also

$$(17)\qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{s=n-\nu}^{s=k-\nu} \mathfrak{q}_{\nu,k-s-\nu}\, s(s-1)\ldots(s-n+\nu+1)\, c_s = 0.$$

Man kann die Recursionsformel einer Reihe, welche in der Umgebung der regulären Stelle $x = 0$ der Differentialgleichung (11) genügen soll, noch in anderer Weise ableiten. Da nämlich die determinierende Gleichung (16) die Wurzeln $0, 1, \ldots, n-1$ hat, kann eine solche Reihe nur in der Form:

$$y = \sum_{(k)} c_k x^k \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

angesetzt werden. Nach dem Taylor'schen Satz ist aber dann

$$c_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k \eta}{dx^k}\right)_{x=0}.$$

Um also eine Beziehung zwischen den $c$ zu ermitteln, braucht man nur eine solche zwischen den Ableitungen verschiedener Ordnung von $\eta$ aufzustellen und dann $x = 0$ zu setzen. Eine Beziehung der letzteren Art ist aber aus der Differentialgleichung (11) leicht zu finden. Differenziert man nämlich diese Gleichung, die wir mittelst des Summenzeichens kurz so schreiben

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \mathfrak{Q}_\nu(x) \,.\, y^{(n-\nu)} = 0,$$

$(k - n)$-mal nach $x$, so ergiebt sich

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{r=0}^{r=k-n} \binom{k-n}{r} \mathfrak{Q}_\nu^{(r)}(x)\, y^{(k-\nu-r)} = 0.$$

Setzt man hierin $x = 0$ und demgemäss

$$(k - \nu - r)!\, c_{k-\nu-r} \quad \text{statt} \quad y^{(k-\nu-r)},$$

so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{r=0}^{r=k-n} \mathfrak{Q}_\nu^{(r)}(0) \binom{k-n}{r} (k - \nu - r)!\, c_{k-\nu-r} = 0. \tag{18}$$

Führt man hier für $r$ durch die Gleichung

$$r = k - \nu - s$$

den Summationsbuchstaben $s$ ein, der also von $k - \nu$ bis $n - \nu$ läuft, während $r$ von $0$ bis $k - n$ geht, und dividiert (18) durch den von den Summationsbuchstaben $\nu$, $r$ unabhängigen und daher allen Gliedern gemeinsamen Faktor $(k - n)!$, so wird (18) mit der auf anderem Weg abgeleiteten Formel (17) identisch.

Für eine spätere Anwendung heben wir noch hervor — was ohne Schwierigkeit aus (7) und (14) abzulesen ist —, dass, wenn man (17) in die Gestalt (8) setzt

$$a_{kk} c_k + a_{k\,k-1} c_{k-1} + \cdots = 0,$$

$a_{kk}$ den Faktor $k(k-1)\,.\,.\,(k-n+1)$, $a_{k\,k-1}$ den Faktor $(k-1)(k-2)\,.\,.\,(k-n+1)$ u. s. w. $a_{k,\,k-n+1}$ den Faktor $(k-n+1)$ enthält.

Als Hauptinhalt dieses Artikels sprechen wir aus:

*Die Wurzeln der zu einer regulären Stelle gehörigen determinierenden Gleichung sind*

$$0,\ 1, \ldots,\ n-1;$$

*die zugehörige Recursionsformel ergiebt sich entweder aus der allgemeinen Recursionsformel durch Specialisierung in der Gestalt* (17) *oder unabhängig von der allgemeinen Formel durch Differentiation der Differentialgleichung.*

**10. Beispiele.** Einige Beispiele mögen die Bildung der Recursionsformel und der determinierenden Gleichung noch weiter erläutern.

*1. Beispiel:*

$$x^{n-\varrho}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-\varrho-1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{P}_{n-\varrho} y^{(\varrho)} + \cdots + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

wo $\varrho$ eine ganze Zahl mit der Beschränkung

$$0 \leqq \varrho \leqq n,$$

die $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen, $\mathfrak{P}_0(0) \neq 0$ und die Coefficienten keinen gemeinsamen Teiler mehr haben. $x = 0$ ist *Stelle der Bestimmtheit und für $\varrho = n$ regulär.* Durch Multiplication der Gleichung mit $x^\varrho$ erhält dieselbe die Normalform. Also ist die determinierende Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(0)k\,..\,(k-n+1) + \mathfrak{P}_1(0)k\,..\,(k-n+2) + \cdots$$
$$+ \mathfrak{P}_{n-\varrho}(0)k\,..\,(k-\varrho+1) = 0;$$

sie besitzt u. a. die Wurzeln

$$0,\ 1, .., \varrho - 1.$$

Man überzeuge sich davon, dass in der zugehörigen Recursionsformel die Grössen

$$\begin{array}{lll} a_{kk} & \text{durch} & k(k-1)\,..\,(k-\varrho+1) \\ a_{k\,k-1} & \text{„} & (k-1)\,..\,(k-\varrho+1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k\,k-\varrho+1} & \text{durch} & (k-\varrho+1) \end{array}$$

teilbar sind.

Für $\varrho = 0$ nimmt die Differentialgleichung die allgemeine Gestalt an, in die man eine Differentialgleichung bei einer Stelle der Bestimmtheit stets bringen kann; für $\varrho = n$ wird $x = 0$ reguläre Stelle.

*2. Beispiel:*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0,$$

wo die $a_1\, a_2\, ..\, a_n$ Constanten sind, hat $x = 0$ als *ausserwesentlich singuläre aber Stelle der Bestimmtheit.* Da die Gleichung schon in der Normalform vorliegt und

$$\mathfrak{P}_0 \equiv 1, \quad \mathfrak{P}_1 \equiv a_1, .., \mathfrak{P}_n \equiv a_n,$$

reduciert sich die Recursionsformel, da nur für $s = k$ $\mathfrak{p}_{\nu,\,k-s} \neq 0$ ist, auf

$$a_{kk}\,.\,c_k = 0,$$

wobei nach (7)

$$a_{kk} \equiv k(k-1)\,..\,(k-n+1) + a_1 k\,..\,(k-n+2) + \cdots + a_n.$$

Hiernach sind nur diejenigen $c_k \neq 0$ und zwar ganz beliebig, deren Index eine Wurzel der determinierenden Gleichung

$$a_{kk} = 0$$

ist. Sind also

$$\alpha_1,\ \alpha_2\,..\,\alpha_n$$

deren Wurzeln, so genügen die mit willkürlichen Constanten multiplicierten Potenzen

$$x^{\alpha_1},\ x^{\alpha_2},\,..,\ x^{\alpha_n}$$

der vorgelegten Differentialgleichung.

*3. Beispiel:*

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta\,.\,y = 0,$$

worin $\alpha, \beta, \gamma$ Constanten, — eine sehr berühmte Gleichung, die wir, weil sie von Gauss zuerst behandelt wurde[1]), immer als *Gauss'sche Differentialgleichung* citieren wollen — hat $x = 0$ und $x = 1$ als *ausserwesentlich singuläre aber Bestimmtheitsstellen.*

a) bei $x = 0$ erhält die Differentialgleichung die Normalform durch Muliplication mit $x$. Dann sind

$$\mathfrak{P}_0(x) \equiv x - 1, \quad \mathfrak{P}_1(x) \equiv -[\gamma - (\alpha+\beta+1)x], \quad \mathfrak{P}_2(x) \equiv \alpha\beta x$$

ganze Functionen von $x$ ersten Grades. Also wird die determinierende Gleichung

$$-k(k-1) - \gamma k = 0$$

mit den Wurzeln

$$0,\ 1-\gamma.$$

Führt man in der Recursionsformel die Summation über $\nu = 0, 1, 2$ aus, so lautet dieselbe

$$\sum_{(s)} \left[ s(s-1)\frac{\mathfrak{P}_0^{(k-s)}(0)}{(k-s)!} + s\frac{\mathfrak{P}_1^{(k-s)}(0)}{(k-s)!} + \frac{\mathfrak{P}_2^{(k-s)}(0)}{(k-s)!} \right] c_s = 0,$$

worin $s = k, k-1, \ldots$ zu setzen ist. Wenn aber $s < k-1$, verschwinden alle Grössen infolge der Werte von $\mathfrak{P}_0(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$. Somit erhält man die *zweigliedrige Recursionsformel*

$$c_k[-k(k-1) - k\gamma]$$
$$+ c_{k-1}[(k-1)(k-2) + (k-1)(\alpha+\beta+1) + \alpha\beta] = 0$$

oder

$$c_k k(k+\gamma-1) = c_{k-1}(k+\alpha-1)(k+\beta-1).$$

1) Gauss, Werke Bd. III. p. 207 ff.

b) Bei $x = 1$ müssen die Coefficienten erst nach Potenzen von $x - 1$ geordnet werden:

$$(x-1)(1+x-1)y'' + [\alpha+\beta+1-\gamma+(\alpha+\beta+1)(x-1)]\,y' + \alpha\beta\,.\,y = 0\,.$$

Nun verfahren wir genau wie vorher, nur muss in den Formeln statt $x = 0$ $x = 1$ gesetzt werden.

Es ist

$$\mathfrak{P}_0(x-1) = 1 + (x-1),\quad \mathfrak{P}_1(x-1) = \alpha+\beta+1-\gamma+(\alpha+\beta+1)(x-1),$$
$$\mathfrak{P}_2(x-1) = \alpha\beta(x-1).$$

Die determinierende Gleichung wird also

$$\mathfrak{P}_0(1)k(k-1) + \mathfrak{P}_1(1)k + \mathfrak{P}_2(1) \equiv k(k+\alpha+\beta-\gamma) = 0$$

mit den Wurzeln

$$0,\ \gamma-\alpha-\beta$$

und die Recursionsformel schliesslich

$$c_k k(k+\alpha+\beta-\gamma) + c_{k-1}(k+\alpha-1)(k+\beta-1) = 0\,.$$

4. *Beispiel:*

$$x^3y'' + a_1xy' + a_2y = 0.$$

$x = 0$ ist *ausserwesentlich singulär und Stelle der Unbestimmtheit;* denn es ist

$$\mathfrak{P}_0(x) \equiv x,\quad \mathfrak{P}_1(x) \equiv a_1,\quad \mathfrak{P}_2(x) \equiv a_2,$$

die determinierende Function also

$$ka_1 + a_2$$

nur *ersten* Grades.

5. *Beispiel:*

$$x^3y'' + a_1x^2y' + a_2y = 0\,.$$

$x = 0$ ist wieder *Stelle der Unbestimmtheit,*

$$\mathfrak{P}_0(x) \equiv x,\quad \mathfrak{P}_1(x) \equiv a_1x,\quad \mathfrak{P}_2(x) \equiv a_2\,;$$

die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function ist also

$$a_2\,,$$

d. h. von $x$ unabhängig; die determinierende Gleichung hat also gar keine endliche Wurzel, und es giebt in diesem Fall sicher keine sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende Reihe, welche der Differentialgleichung genügt.

# Kapitel II.

## Berechnung der Reihencoefficienten aus der Recursionsformel[1]).

**11. Präcisierung der Aufgabe.** Wir haben im vorigen Kapitel durch die Recursionsformel ein System von Gleichungen, denen die Coefficienten $c_\alpha$, $c_{\alpha+1}, \ldots$ der versuchsweise für $y$ in die Differentialgleichung eingesetzten Reihe genügen müssen, und damit gleichzeitig eine Gleichung für den Anfangsexponenten $\alpha$ gewonnen. Wir haben aber noch nicht untersucht, *in welcher Weise sich die Coefficienten c aus jenen Gleichungen berechnen.* Insbesondere haben wir nur festgestellt, dass der Anfangsexponent $\alpha$ der *notwendigen* Bedingung unterliegt, eine Wurzel der determinierenden Gleichung zu sein; wir wissen aber nicht, *ob umgekehrt zu jeder Wurzel $\alpha$ derselben thatsächlich eine Reihe gehört,* d. h. ob gerade bei diesem $\alpha$ die aus der Recursionsformel fliessenden Gleichungen durch einen von Null verschiedenen Wert von $c_\alpha$ zu erfüllen sind, *bezw. unter welchen Bedingungen dies der Fall ist.*

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder die Gleichung $a_{kk} = 0$ hat *keine* Wurzel, welche $\alpha$ um eine positive ganze Zahl übertrifft, oder sie hat mindestens eine solche. Im ersten Falle bleibt nach der für $k = \alpha$ aus der Recursionsformel gebildeten Gleichung $c_\alpha$ völlig willkürlich; dann aber ist in keiner der unendlich vielen folgenden Gleichungen der Coefficient des höchsten, durch diese Gleichung neu eingeführten $c$ Null; mithin sind alle diese $c$ als einfache Multipla des ersten willkürlich bleibenden $c_\alpha$ ausgedrückt, nämlich

$$c_k = (-1)^{k-\alpha} \cdot c_\alpha \frac{D_{\alpha k}}{a_{\alpha+1,\,\alpha+1} \cdot a_{\alpha+2,\,\alpha+2} \cdots a_{kk}},$$

wo

$$D_{\alpha k} = \begin{vmatrix} a_{\alpha+1,\,\alpha} & a_{\alpha+1,\,\alpha+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{\alpha+2,\,\alpha} & a_{\alpha+2,\,\alpha+1} & a_{\alpha+2,\,\alpha+2} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k-1,\,\alpha} & a_{k-1,\,\alpha+1} & a_{k-1,\,\alpha+2} & & \ldots & a_{k-1,\,k-1} \\ a_{k\alpha} & a_{k,\,\alpha+1} & a_{k,\,\alpha+2} & & \ldots & a_{kk-1} \end{vmatrix}.$$

1) Vgl. des Verf. Hab.-Schrift, Giessen 1888, und Crelles Journ. Bd. 111. (1893). S. 59—63.

Wir haben also das Resultat:

*Ist $\alpha$ eine Wurzel der determinierenden Gleichung, welche von keiner andern Wurzel derselben um eine positive ganze Zahl übertroffen wird, so gehört zu ihr stets eine Reihe.*

Im zweiten Falle dagegen giebt es mindestens eine Wurzel von $a_{kk} = 0$, die $\alpha$ um eine positive ganze Zahl übertrifft. Wir wollen eine Gesamtheit aller solcher Wurzeln von $a_{kk} = 0$, die sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden, eine *Gruppe von Wurzeln* dieser Gleichung nennen. Gehört also $\alpha$ einer solchen Gruppe an, so sei $\nu$ die Wurzel der Gruppe mit dem grössten reellen Teil oder — wie wir kurz sagen wollen — die *grösste* Wurzel der Gruppe. Dann ergiebt also die Recursionsformel (wenn von der ersten Gleichung $a_{\alpha\alpha} \,.\, c_\alpha = 0$ abgesehen wird, weil $a_{\alpha\alpha} = 0$) für

$$k = \alpha + 1,\ \alpha + 2, \ldots, \nu - 1,\ \nu$$

zunächst ein System von $\nu - \alpha$ linearen homogenen Gleichungen zwischen ebensoviel Unbekannten

$$c_\alpha,\ c_{\alpha+1}, \ldots, c_{\nu-1},$$

während die nächste Gleichung die beiden neuen Unbekannten $c_\nu$ und $c_{\nu+1}$ einführt und von dieser an der Coefficient des höchsten $c$ niemals mehr verschwindet. Es bleibt demnach $c_\nu$ völlig willkürlich, und von $c_{\nu+1}$ ab sind alle Coefficienten $c$ lineare homogene Functionen der Grössen

$$c_\alpha\ c_{\alpha+1} \ldots c_\nu .$$

Es ist nun die Frage, *ob jenes System von $\nu - \alpha$ Gleichungen ein anderes Lösungssystem besitzt als dasjenige, bei dem alle $c_\alpha \ldots c_{\nu-1} = 0$ sind, und speziell ein solches, bei dem $c_\alpha$ nicht notwendig gleich Null ist.*

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür zu ermitteln, ist die Aufgabe der jetzt folgenden Untersuchung.

**12. Einführung von Bezeichnungen.** Bezeichnen wir die von einander verschiedenen Wurzeln der Gruppe von $\alpha$ bis $\nu$ mit

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta, \ldots, \lambda,\ \mu,\ \nu,$$

wo also jede um eine positive ganze Zahl grösser ist als die vorhergehende, so lautet das zu untersuchende System linearer homogener Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= a_{\alpha+1,\alpha}c_\alpha + a_{\alpha+1,\alpha+1}c_{\alpha+1}\\
0 &= a_{\alpha+2,\alpha}c_\alpha + a_{\alpha+2,\alpha+1}c_{\alpha+1} + a_{\alpha+2,\alpha+2}c_{\alpha+2}\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
0 &= a_{\beta-1,\alpha}c_\alpha + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + a_{\beta-1,\beta-1}c_{\beta-1}\\
0 &= a_{\beta,\alpha}c_\alpha + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + a_{\beta\beta-1}c_{\beta-1}\\
0 &= a_{\beta+1,\alpha}c_\alpha + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + a_{\beta+1,\beta-1}c_{\beta-1} + a_{\beta+1,\beta}c_\beta + a_{\beta+1,\beta+1}c_{\beta+1}\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
0 &= a_{\nu+1,\alpha}c_\alpha + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + a_{\nu-1,\nu-1}c_{\nu-1}\\
0 &= a_{\nu,\alpha}c_\alpha + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + a_{\nu,\nu-1}c_{\nu-1}
\end{aligned}
$$

oder kurz geschrieben

$$
(1) \qquad 0 = \sum_{s=\alpha}^{s=k} a_{ks}c_s \equiv F_{k\alpha} \qquad (k = \alpha+1,\ \alpha+2, \ldots),
$$

wobei

$$
a_{\beta\beta} = a_{\gamma\gamma} = a_{\delta\delta} = \cdots = a_{\mu\mu} = a_{\nu\nu} = 0,
$$

alle andern $a_{kk}$ aber von Null verschieden sind. Es ist zu untersuchen, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen speziell $c_\alpha$ willkürlich bleibt, also nicht notwendig gleich Null gesetzt werden muss.

Es ist klar, dass, wie das Verschwinden von $a_{\alpha\alpha}$ stets notwendig war, das Verschwinden aller Grössen

$$
a_{k\alpha} \qquad (k = \alpha,\ \alpha+1, \ldots, \nu)
$$

unter allen Umständen *hinreichend* für die Willkürlichkeit von $c_\alpha$ ist. Dies würde aber eine Lösung des Problems nur für einen so speziellen Fall bedeuten, dass wir nach Bedingungen von mehrsagendem Inhalt forschen müssen.

Zu diesem Zweck führen wir noch einige abkürzende Bezeichnungen ein. Das Gleichungssystem (1) werde mit

$$
S_{\alpha\nu} \text{ oder kurz } S,
$$

die zugehörige Determinante, gebildet aus den Coefficienten von $S_{\alpha\nu}$, mit

$$
D_{\alpha\nu} \text{ oder kurz } D
$$

bezeichnet; allgemein sei

$$
S_{\varrho\sigma} \text{ und } D_{\varrho\sigma}
$$

das System, bezw. die Determinante, welches aus $S$ (bezw. aus $D$) entsteht, wenn $\alpha$ durch $\varrho$, $\nu$ durch $\sigma$ ersetzt wird und dabei $\varrho$ *irgend* eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \mu$, $\sigma$ irgend eine der Zahlen $\beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$, die grösser als $\varrho$, bedeutet.

Hiernach[1]) ist zunächst $D$, die Determinante des ganzen Systems $S$, als Produkt einer Anzahl von Unterdeterminanten darstellbar, nämlich

$$D \equiv D_{\alpha\nu} = D_{\alpha\beta} \,.\, D_{\beta\gamma} \,.\, D_{\gamma\delta} \ldots D_{\mu\nu}. \tag{2}$$

In $D$ und in allen Unterdeterminanten jeder Ordnung derselben ist nun jede Zeile durch den ersten ($k$), jede Colonne durch den zweiten Index ($s$) charakterisiert. Wir wollen deshalb kurz von „*Zeile* $k$“ und „*Colonne* $s$“ sprechen. Dann bezeichnen wir die Determinante, die aus $D_{\alpha\gamma}$ durch Fortlassung von Zeile $\beta$ und Colonne $\beta$ entsteht (d. h. durch Fortlassung der beiden Reihen, welche sich an der Stelle des Elementes $a_{\beta\beta}$ kreuzen), mit

$$D_{\alpha(\beta)\gamma};$$

die Determinante, die aus $D_{\beta\delta}$ durch Fortlassung von Zeile und Colonne $\gamma$ entsteht, mit

$$D_{\beta(\gamma)\delta}; \quad \text{u. s. w.};$$

ähnlich die Determinante, welche aus $D_{\alpha\delta}$ durch Fortlassung der Zeilen und Colonnen $\beta$ und $\gamma$ entsteht, mit

$$D_{\alpha(\beta\gamma)\delta};$$

die aus $D_{\beta\varepsilon}$ durch Fortlassung der Zeilen und Colonnen $\gamma$ und $\delta$ entstehende Determinante mit

$$D_{\beta(\gamma\delta)\varepsilon}; \quad \text{u. s. w.};$$

u. s. w.; endlich die Determinante, die aus $D_{\alpha\nu}$ durch Fortlassung aller Zeilen und aller Colonnen $\beta, \gamma, \delta, \ldots, \mu$ entsteht, mit

$$D_{\alpha(\beta\gamma\ldots\mu)\nu}.$$

Im Ganzen bilden wir so das folgende System von Determinanten

$$\left\{\begin{array}{lllll}
D_{\alpha\beta} & & & & \\
D_{\alpha(\beta)\gamma} & D_{\beta\gamma} & & & \\
D_{\alpha(\beta\gamma)\delta} & D_{\beta(\gamma)\delta} & D_{\gamma\delta} & & \\
D_{\alpha(\beta\gamma\delta)\varepsilon} & D_{\beta(\gamma\delta)\varepsilon} & D_{\gamma(\delta)\varepsilon} & D_{\delta\varepsilon} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
D_{\alpha(\beta\gamma\ldots\mu)\nu} & D_{\beta(\gamma\delta\ldots\mu)\nu} & D_{\gamma(\delta\varepsilon\ldots\mu)\nu} & D_{\delta(\varepsilon\ldots\mu)\nu} \ldots & D_{\mu\nu}.
\end{array}\right. \tag{3}$$

Endlich setzen wir noch die nach Voraussetzung von Null verschiedenen Produkte

1) Vergl. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. Aufl. Leipzig 1881. § 4. 2. S. 33.

$$
(4)\quad \begin{cases}
a_{\alpha+1,\,\alpha+1}\cdot a_{\alpha+2,\,\alpha+2}\cdots a_{\beta-1,\,\beta-1}=A_{\alpha\beta}\\
a_{\beta+1,\,\beta+1}\cdot a_{\beta+2,\,\beta+2}\cdots a_{\gamma-1,\,\gamma-1}=A_{\beta\gamma}\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\\
a_{\mu+1,\,\mu+1}\cdot a_{\mu+2,\,\mu+2}\cdots a_{\nu-1,\,\nu-1}=A_{\mu\nu}.
\end{cases}
$$

Sollte dabei eine der Differenzen

$$\beta-\alpha,\ \gamma-\beta, \ldots, \nu-\mu$$

gleich der Einheit sein, so tritt nach (4) die entsprechende Grösse $A$ gar nicht auf; wir wollen aber die Bezeichnung auch für diesen Fall beibehalten und

$$A_{\varrho\sigma}=1$$

setzen, wenn $\varrho$, $\sigma$ zwei aufeinander folgende der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu$ sind und $\sigma-\varrho=1$ ist. Alsdann haben die folgenden Grössen

$$
(5)\quad \begin{cases}
A_{\alpha\beta}\\
A_{\alpha\gamma}=A_{\alpha\beta}\cdot A_{\beta\gamma}\\
A_{\alpha\delta}=A_{\alpha\beta}\cdot A_{\beta\gamma}\cdot A_{\gamma\delta}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
A_{\alpha\nu}=A_{\alpha\beta}\cdot A_{\beta\gamma}\cdot A_{\gamma\delta}\cdots A_{\mu\nu}
\end{cases}
$$

in allen Fällen eine wohldefinierte Bedeutung und sind *von Null verschieden.*

**13. Ersetzung des Systems $S$ durch ein anderes.** Das Gleichungssystem $S$ ist nun derart, dass die Gleichungen

$$
(6)\quad \begin{cases}
F_{\alpha+1,\,\alpha}=0,\ \ldots,\ F_{\beta-1,\,\alpha}=0\\
F_{\beta+1,\,\alpha}=0,\ \ldots,\ F_{\gamma-1,\,\alpha}=0\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
F_{\mu+1,\,\alpha}=0,\ \ldots,\ F_{\nu-1,\,\alpha}=0,
\end{cases}
$$

nur die von ihnen neu eingeführte Unbekannte $c$, deren Coefficient $\neq 0$ ist, durch die bezw. vorangehenden der Grössen

$$c_\alpha c_\beta \ldots c_\mu$$

ausdrücken, über $c_\alpha$ also nichts aussagen. Wir streben deshalb zunächst darnach, das System durch ein anderes zu ersetzen, welches nur noch die Unbekannten $c_\alpha c_\beta \ldots c_\mu$ enthält und für deren Werte dem System $S$ äquivalent ist.

Zu dem Ende fassen wir zuerst von dem ganzen System $S$ oder $S_{\alpha\nu}$ nur das *Teilsystem* $S_{\alpha\beta}$ in's Auge, d. h. die Gleichungen

$$F_{\alpha+1,\,\alpha}=0,\quad F_{\alpha+2,\,\alpha}=0,\ \ldots,\ F_{\beta\alpha}=0.$$

Sind nun

$$d_{\alpha+1,\,\beta},\quad d_{\alpha+2,\,\beta},\ \ldots,\ d_{\beta\beta}$$

die Adjuncten der Elemente der ersten Colonne in der Determinante $D_{\alpha\beta}$, sodass insbesondere

$$d_{\beta\beta} = \pm A_{\alpha\beta} \neq 0$$

ist, so besteht die Identität

$$(7) \qquad d_{\alpha+1,\,\beta} F_{\alpha+1,\,\alpha} + d_{\alpha+2,\,\beta} F_{\alpha+2,\,\alpha} + \cdots + d_{\beta\beta} F_{\beta\alpha} = c_\alpha \,.\, D_{\alpha\beta}.$$

Sucht man nämlich links die Coefficienten von $c_\alpha, c_{\alpha+1}, \ldots, c_{\beta-1}$ auf, so sind dies Determinanten, deren erste gerade $D_{\alpha\beta}$ ist, während in allen übrigen je zwei gleiche Colonnen (nämlich bezw. die 1[te] und 2[te], 1[te] und 3[te] u. s. w.) vorkommen. Die Identität (7) lehrt, dass nicht nur die Gleichung

$$(8) \qquad c_\alpha \,.\, D_{\alpha\beta} = 0$$

eine Folge des Systems $S_{\alpha\beta}$ ist, — denn wenn die Gleichungen des Systems $S_{\alpha\beta}$ erfüllt sind, verschwindet ja die linke Seite von (7), — sondern auch umgekehrt, weil $d_{\beta\beta} \neq 0$, die Gleichung

$$F_{\beta\alpha} = 0$$

eine Folge der Gleichungen

$$F_{\alpha+1,\,\alpha} = 0, \ldots, F_{\beta-1,\,\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad (8)$$

ist. *Das Teilsystem $S_{\alpha\beta}$ ist daher dem System äquivalent, welches aus $S_{\alpha\beta}$ entsteht, wenn die Gleichung $F_{\beta\alpha} = 0$ durch (8) ersetzt wird.*

Betrachten wir nun das Teilsystem $S_{\alpha\gamma}$ von $S_{\alpha\nu}$, in dem wir uns aber die Gleichung $F_{\beta\alpha} = 0$ schon durch (8) ersetzt denken und die letztere, weil sie schon die gewünschte Form hat, dass die $c_s$ $(s \neq \alpha, \beta, \ldots, \mu)$ nicht mehr darin vorkommen, auslassen, so handelt es sich also jetzt um die Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{cases} F_{\alpha+1,\,\alpha} = 0, \ldots, F_{\beta-1,\,\alpha} = 0 \\ F_{\beta+1,\,\alpha} = 0, \ldots, F_{\gamma-1,\,\alpha} = 0, \; F_{\gamma\alpha} = 0. \end{cases}$$

Sind nun

$$\begin{gathered} d_{\alpha+1,\,\gamma}, \ldots, d_{\beta-1,\,\gamma} \\ d_{\beta+1,\,\gamma}, \ldots, d_{\gamma-1,\,\gamma}, d_{\gamma\gamma} \end{gathered}$$

die Adjuncten der Elemente der ersten Colonne der Determinante $D_{\alpha(\beta)\gamma}$, wobei insbesondere

$$d_{\gamma\gamma} = \pm A_{\alpha\gamma} \neq 0,$$

so besteht die wie (7) zu beweisende Identität

$$\begin{aligned} (7') \quad d_{\alpha+1,\,\gamma} F_{\alpha+1,\,\alpha} + \cdots + d_{\beta-1,\,\gamma} F_{\beta-1,\,\alpha} + d_{\beta+1,\,\gamma} F_{\beta+1,\,\alpha} + \cdots + \\ + d_{\gamma\gamma} F_{\gamma\alpha} = c_\alpha D_{\alpha(\beta)\gamma} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Diese lehrt wiederum, dass nicht nur die Gleichung

$$(8') \qquad c_\alpha D_{\alpha(\beta)\gamma} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma} = 0$$

eine Folge der Gleichungen (9), sondern auch umgekehrt, da $d_{\gamma\gamma} \neq 0$, die Gleichung $F_{\gamma\alpha} = 0$ eine Folge der übrigen Gleichungen (9) und der Gleichung (8′) ist. Das System der Gleichungen (9) ist daher dem hieraus entstehenden System, wenn $F_{\gamma\alpha} = 0$ durch (8′) ersetzt wird, äquivalent, folglich auch, wenn man zu (9) die fortgelassene Gleichung $F_{\beta\alpha} = 0$ wieder hinzufügt, das System $S_{\alpha\gamma}$ dem hieraus durch Ersetzung von $F_{\gamma\alpha} = 0$ durch (8′) entstehenden System. Verbindet man hiermit noch die vorangegangene, auf $S_{\alpha\beta}$ bezügliche Betrachtung, so hat man das Resultat: *das System $S_{\alpha\gamma}$ ist dem System, welches hieraus entsteht, wenn Gleichung*

$$F_{\beta\alpha} = 0 \textit{ durch } (8) \textit{ und } F_{\gamma\alpha} = 0 \textit{ durch } (8')$$

*ersetzt wird, äquivalent.*

So schliesst man weiter, indem man bei dem nächst grösseren Teilsystem $S_{\alpha\delta}$ die Adjuncten der Elemente der ersten Colonne von

$$D_{\alpha(\beta\gamma)\delta}$$

benutzt u. s. w., schliesslich bei dem ganzen System $S_{\alpha\nu}$ die Adjuncten der ersten Colonne von

$$D_{\alpha(\beta\ldots\mu)\nu}.$$

Auf diese Weise wird das System $S$ äquivalent ersetzt durch ein System, welches aus $S$ entsteht, wenn an Stelle von

$$F_{\beta\alpha} = 0, \quad F_{\gamma\alpha} = 0, \ldots, F_{\nu\alpha} = 0$$

bezw. die Gleichungen treten

$$(10) \quad \begin{cases} 0 = c_\alpha . D_{\alpha\beta} \\ 0 = c_\alpha D_{\alpha(\beta)\gamma} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma} \\ 0 = c_\alpha D_{\alpha(\beta\gamma)\delta} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta(\gamma)\delta} + c_\gamma A_{\alpha\gamma} D_{\gamma\delta} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = c_\alpha D_{\alpha(\beta\ldots\mu)\nu} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta(\gamma\ldots\mu)\nu} + \cdots\cdots + c_\mu A_{\alpha\mu} D_{\mu\nu}; \end{cases}$$

d. h. *das System $S$ ist äquivalent dem System der Gleichungen* (6) *und* (10) *zusammengenommen.*

Da nun aber die Werte der Coefficienten $c_\alpha\ c_\beta \ldots c_\mu$, wenn sie gemäss den Gleichungen (10) berechnet sind, durch die Gleichungen (6), wie schon oben bemerkt, gar nicht mehr alteriert werden, so kann man als Hauptergebnis dieses Artikels aussprechen:

*Für die Werte der Coefficienten $c_\alpha, c_\beta, \ldots, c_\mu$ ist das System der Gleichungen* (10) *allein dem System $S$ äquivalent*[1]).

---

1) Den hier gegebenen Beweis dieser Aequivalenz verdankt der Verf. einer Mitteilung des Herrn Pasch.

Hieraus ziehen wir noch die Folgerungen, die sich ebenso unmittelbar ergeben, wie die entsprechende Bemerkung zu Anfang des Artikels 12 in Bezug auf das System $S$:

*Das Verschwinden von $D_{\alpha\beta}$ ist eine stets notwendige, und das Verschwinden von $D_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha(\beta)\gamma}$, $D_{\alpha(\beta\,..\,\mu)\nu}$ eine Gruppe stets hinreichender Bedingungen dafür, dass $c_\alpha$ willkürlich bleibt.*

Ersteres hätte man natürlich auch daraus erschliessen können, dass ohne das Verschwinden von $D_{\alpha\beta}$ bereits das erste Teilsystem $S_{\alpha\beta}$ nur die triviale Lösung besitzt, bei der alle $c = 0$ sind. Wir bemerken noch, dass die Coefficienten der $c$ in (10) abgesehen von den $A$ gerade die in (3) zusammengestellten Determinanten sind.

**14. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zu einer Wurzel der determinierenden Gleichung eine Reihe gehört.** Die soeben ermittelte notwendige Bedingung setzen wir nunmehr als erfüllt voraus und sehen daher von der ersten der Gleichungen (10) ganz ab. Dann hat man aber in den übrigen Gleichungen (10) ein System von ähnlicher Form wie (1) oder $S$ und, wenn $D_{\mu\nu} = 0$, sogar ein völlig analoges. Ist aber $D_{\mu\nu} \neq 0$, so kann man die letzte der Gleichungen (10) einfach fortlassen — gerade wie ganz zu Anfang die Gleichungen $F_{\nu+1,\alpha} = 0$, $F_{\nu+2,\alpha} = 0, \ldots$ — weil sie über $c_\alpha$ nichts aussagt. Dieselbe Betrachtung knüpft sich dann an die vorletzte der Gleichungen (10) u. s. w. Sind nun sämtliche Determinanten

$$D_{\mu\nu},\quad D_{\lambda\mu}, \ldots, D_{\beta\gamma} \neq 0,$$

so bleibt von dem ganzen System (10) nichts mehr übrig ausser der ersten Gleichung, und *die stets notwendige Bedingung*

$$D_{\alpha\beta} = 0$$

*ist in diesem Falle allein auch schon hinreichend.*

Andernfalls sei etwa

$$D_{\sigma\tau},$$

von $D_{\mu\nu}$ aus gerechnet, die erste jener Determinanten, die verschwindet, so behält man von (10) nur die Gleichungen

$$(1') \qquad \begin{cases} 0 = c_\alpha D_{\alpha(\beta)\gamma} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0 = c_\alpha D_{\alpha(\beta\,..\,\varrho)\sigma} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta(\gamma\,..\,\varrho)\sigma} + \cdots + c_\varrho A_{\alpha\varrho} D_{\varrho\sigma} \\ 0 = c_\alpha D_{\alpha(\beta\,..\,\sigma)\tau} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta(\gamma\,..\,\sigma)\tau} + \cdots + c_\varrho A_{\alpha\varrho} D_{\varrho(\sigma)\tau} \end{cases}$$

bei und besitzt in ihnen also ein dem System $S$ völlig analog gebautes System, das wir mit $S'$ bezeichnen wollen.

Mit diesem System $S'$ verfahren wir nun genau wie vorher mit $S$; wir ersetzen dasselbe durch ein in Bezug auf $c_\alpha$ und diejenigen

andern $c$, deren Coefficient in der sie neu einführenden Gleichung von $S'$ verschwindet, äquivalentes System, welches also zusammen mit Gleichung (8) in Bezug auf die $c$, die es noch enthält, dem ursprünglichen System $S$ äquivalent ist. Dieses System liefert wieder eine notwendige Bedingung der Form

$$c_\alpha \,.\, D' = 0\,;$$

dann bildet man ein System $S''$ u. s. w., bis man zu einem System $S^{(m)}$ gelangt, welches nur eine einzige notwendige und — für dieses System $S^{(m)}$ — zugleich hinreichende Bedingung liefert in Gestalt einer Gleichung

$$c_\alpha \,.\, D^{(m)} = 0\,.$$

Wegen der Aequivalenz der sämtlichen so erhaltenen Gleichungen

(11) $$c_\alpha D_{\alpha\beta} = 0\,,\quad c_\alpha D' = 0\,,\,.\,.\,,\, c_\alpha D^{(m)} = 0$$

mit dem ursprünglichen System $S$ in Bezug auf $c_\alpha$ *stellen die Gleichungen*

(12) $$D_{\alpha\beta} = 0\,,\quad D' = 0\,,\,.\,.\,,\, D^{(m)} = 0$$

*die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass $c_\alpha$ willkürlich bleibt,* d. h. *dass zu $\alpha$ thatsächlich eine Reihe gehört.*

Das System $S^{(m)}$ wird aber nach einer *endlichen* Anzahl ($m$) von Operationen erreicht, weil bei jedem Schritt von einem System $S^{(k)}$ zu $S^{(k+1)}$ die Zahl der Gleichungen sich mindestens um die Einheit erniedrigt.

**15. Die willkürlichen Constanten der Reihen.** Bei dem Übergang von dem ursprünglichen System $S$, welches die Unbekannten

$$c_\alpha\; c_{\alpha+1}\; .\; .\; .\; c_{r-1}$$

enthielt, bis zu dem für die Berechnung von $c_\alpha$ schliesslich an seine Stelle gesetzten System der Gleichungen (11) sind also nach und nach sämtliche $c$ ausser $c_\alpha$ aus den Gleichungen ausgefallen, jedoch auf zweierlei wesentlich verschiedene Art: die einen, weil sie sich entweder schon zufolge dem System $S$ oder $S'$ oder einem der späteren nur durch die vorangehenden $c$ ausdrückten und deshalb die Gleichungen, die sie einführten, einfach weggelassen werden konnten, — die andern, gerade wie $c_\nu$ in dem ursprünglichen System $S$, weil sie in einem der an Stelle von $S$ tretenden Systeme erst in der letzten Gleichung auftreten konnten, durch Verschwinden ihres Coefficienten aber thatsächlich *von selbst* aus dem ganzen System ausfielen. So verhielt es sich z. B. in dem System (1') oder $S'$ mit der Unbekannten $c_\alpha$. *Diese letzteren $c$ bleiben also auf Grund des Systems $S$,* d. h. *nach der Recursionsformel willkürlich.* Da diese Eigenschaft natürlich dadurch, dass

wir dem $c_\alpha$ — wenn dasselbe willkürlich ist — den Wert 0 beilegen, nicht beeinflusst wird, so erhellt, dass zu jedem Index der in der Reihe

$$\eta = \sum_{(k)} c_k x^k \qquad (k = \alpha, \alpha + 1, \ldots)$$

willkürlich bleibenden $c$ ebenfalls wie zu $\alpha$ thatsächlich eine Reihe gehört. In der That ist es nicht schwierig, aber für uns nicht mehr notwendig, zu zeigen, dass, wenn z. B. $c_\varepsilon$, wo $\varepsilon$ eine der Zahlen $\beta, \gamma, \ldots, \mu$, einer der in der Reihe $\eta$ aus dem oben angeführten Grund willkürlich bleibenden Coefficienten ist, das schliessliche Ausfallen von $c_\varepsilon$ aus den Systemen $S, S', \ldots S^{(m)}$ gerade dadurch bewirkt wird, dass die Bedingungen (12), statt für $\alpha$ für $\varepsilon$ gebildet, erfüllt sind. Unsere Untersuchungsmethode beantwortet also mehr, als wir anfänglich gefragt hatten: wir besitzen nicht nur die notwendigen und hinreichenden Bedingungen (12), unter denen zu $\alpha$ eine Reihe gehört, sondern wir erfahren bei Aufstellung jener Bedingungen gleichzeitig, welche Coefficienten in der zu $\alpha$ gehörigen Reihe willkürlich bleiben, oder — mit anderen Worten — zu welchen grösseren Wurzeln der Gruppe ausser $\alpha$ Reihen gehören.

Nehmen wir daher für $\alpha$ *die Wurzel der Gruppe mit dem kleinsten reellen Teil*, so ist also mit der Durchführung der Untersuchung für diese schon die ganze Frage erledigt, d. h. wir kennen bereits sämtliche Wurzeln der Gruppe, zu denen Reihen gehören.

Verstehen wir nun unter $\alpha_1$ die *kleinste* Wurzel der ganzen Gruppe (d. h. diejenige mit dem kleinsten reellen Teil), *zu welcher eine Reihe gehört*, und seien etwa

$$\beta_1, \gamma_1, \ldots, \mu_1 \text{ und } \nu$$

die Indices der in der zu $\alpha_1$ gehörigen Reihe

$$\eta = \sum_{(k)} c_k x^k \qquad (k = \alpha_1, \alpha_1 + 1, \ldots)$$

willkürlich bleibenden $c$, so ist nach der Recursionsformel *jedes andere $c_k$ eine lineare homogene Function der willkürlich bleibenden Coefficienten*

$$c_{\alpha_1}\; c_{\beta_1}\; c_{\gamma_1} \ldots c_{\mu_1}\; c_\nu\,,$$

bezw. nur derjenigen von diesen, die ihm schon vorangehen.

Bezeichnen wir, um dies hervorzuheben, für den Augenblick das Integral $\eta$ selbst als lineare homogene Function dieser Coefficienten

$$(13) \qquad \eta = L(c_{\alpha_1}\, c_{\gamma_1} \ldots c_{\mu_1}\, c_\nu)\,,$$

so ist $\eta$ offenbar die *allgemeinste von der Recursionsformel gelieferte Reihe, in welcher die Exponenten sämtlicher auftretenden Potenzen von $x$*

*sich von den Wurzeln der betrachteten Gruppe nur um ganze Zahlen oder Null unterscheiden.* Da aber für eine solche lineare homogene Function die Identität besteht

$$(14) \qquad L(c_{\alpha_1} c_{\beta_1} \ldots c_{\mu_1} c_\nu) \equiv$$
$$L(c_{\alpha_1}, 0, \ldots, 0) + L(0, c_{\beta_1}, 0, \ldots, 0) + \cdots + L(0, 0, \ldots, 0, c_\nu),$$

so ist es völlig gleichwertig, ob man mit der allgemeinsten Reihe (13) oder den *partikulären* Reihen, die auf der rechten Seite von (14) erscheinen, weiter operiert.

Den wichtigen Inhalt dieses Artikels und zugleich die Hauptergebnisse des ganzen Kapitels fassen wir folgendermassen zusammen:

*Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \nu$ die sämtlichen von einander verschiedenen Wurzeln einer Wurzelgruppe der determinierenden Gleichung, in dieser Folge so geordnet, dass die reellen Teile stets wachsen, so liefert die Recursionsformel stets eine zu der grössten Wurzel $\nu$ gehörige Reihe, deren Anfangscoefficient willkürlich bleibt, während alle folgenden Coefficienten Multipla von ihm sind. — Die Bedingungen* (12), *für die kleinste Wurzel $\alpha$ gebildet, zeigen, ob auch zu einer oder mehreren, bezw. zu welchen der Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ eine Reihe gehört. Ist dies etwa bei $\alpha_1, \beta_1 \ldots \mu_1$ der Fall, so bleiben in der zu $\alpha_1$ gehörigen Reihe noch die Coefficienten*

$$c_{\alpha_1}, c_{\beta_1}, \ldots, c_{\mu_1}, c_\nu$$

*willkürlich, während alle übrigen $c$ linear und homogen in diesen sind. Diese Reihe ist die allgemeinste nach der Recursionsformel zu bildende, deren Exponenten sich von den Zahlen der Wurzelgruppe $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ nur um ganze Zahlen unterscheiden.*

**16. Zwei extreme Specialfälle.** Obwohl wir im Vorangehenden die für das gegenwärtige Kapitel aufgeworfene Frage bereits ganz allgemein gelöst haben, wollen wir als besonders bemerkenswert noch zwei einander extrem gegenüber stehende Specialfälle ausdrücklich hervorheben, deren einen wir in Artikel 14 schon flüchtig berührt haben. Wir fanden dort: Wenn die Determinanten

$$D_{\beta\gamma}, D_{\gamma\delta}, \ldots, D_{\mu\nu} \neq 0$$

sind, ist die eine Bedingung $D_{\alpha\beta} = 0$ allein schon notwendig und hinreichend, damit zu $\alpha$ eine Reihe gehört.

Wir können die Voraussetzungen hierfür noch anders aussprechen. Wenn nämlich die obigen Determinanten nicht Null sind, kann zu keiner der Wurzeln

$$\beta, \gamma, \ldots, \mu$$

eine Reihe gehören, weil ja das Verschwinden der Determinante $D_{\varrho\sigma}$ etwa eine notwendige Bedingung dafür wäre, dass zu $\varrho$ eine Reihe

5. — Aber auch umgekehrt: Wenn zu keiner der Zahlen .., $\mu$ eine Reihe gehört, müssen die sämtlichen Determinanten

$$D_{\beta\gamma},\ D_{\gamma\delta},\ \ldots,\ D_{\mu\nu} \neq 0$$

Wäre nämlich $D_{\varrho\sigma}$, von $D_{\mu\nu}$ aus gerechnet, die erste dieser ninanten, die verschwindet, so würde ja nach dem in Artikel 14 enen und soeben in Erinnerung gebrachten Satz dies schon notg und hinreichend dafür sein, dass zu $\varrho$ eine Reihe gehört. Also n wir jenen Satz auch so aussprechen:

*Venn — abgesehen von der grössten Wurzel $\nu$ — zu keiner der eln, deren reelle Teile grösser sind als der von $\alpha$ ($\beta, \gamma, \ldots, \mu$), eine gehört, oder — was sich damit deckt — wenn die Determinanten $D_{\gamma\delta}, \ldots, D_{\mu\nu} \neq 0$ sind, so ist die einzige Bedingung*

$$D_{\alpha\beta} = 0$$

*ndig und hinreichend dafür, dass zu $\alpha$ eine Reihe gehört.*

ritt dagegen der entgegengesetzte Specialfall ein, dass zu *allen* eln $\beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$, deren reeller Teil grösser als der von $\alpha$ ist, Reihe gehört, so folgt zunächst das Verschwinden von $D_{\mu\nu}$, da Voraussetzung zu $\mu$ eine Reihe gehört. Bildet man dann das dem n (10) entsprechende System für $\lambda$, so lautet es

$$0 = c_\lambda D_{\lambda\mu}$$
$$0 = c_\lambda D_{\lambda(\mu)\nu} + c_\mu A_{\lambda\mu} D_{\mu\nu};$$

er $D_{\mu\nu} = 0$ und nach Voraussetzung zu $\lambda$ eine Reihe gehört, uch

$$D_{\lambda\mu} = 0, \quad D_{\lambda(\mu)\nu} = 0$$

v. Folglich reducieren sich in diesem Falle die rechten Seiten leichungen (10) auf die Glieder mit $c_\alpha$ und das Verschwinden eren sämtlichen Coefficienten

$$D_{\alpha\beta},\ D_{\alpha(\beta)\gamma},\ \ldots,\ D_{\alpha(\beta\ldots\mu)\nu},$$

es eine Gruppe stets hinreichender Bedingungen abgab (s. Artikel 13 chluss), ist hier auch *notwendig*, damit $c_\alpha$ willkürlich bleibt.

Vir haben also als Gegenstück zu dem obigen Satz:

*Wenn $\alpha$ eine beliebige Wurzel der Gruppe und zu allen Wurzeln en mit grösserem reellen Teil eine Reihe gehört, so sind die stets chenden Bedingungen (das Verschwinden der Determinanten in der Colonne der Tabelle (3)) auch sämtlich notwendig dafür, dass zu Reihe gehört.*

Hiermit sind wir auch unmittelbar im Besitz der Bedingungen , dass zu *jeder* Wurzel der Gruppe eine Reihe gehört. Ist nämα die kleinste Wurzel der Gruppe, sodass

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots, \mu,\ \nu$$

*sämtliche* Wurzeln derselben sind, so bestehen jene Bedingungen nach dem soeben ausgesprochenen Satz in dem Verschwinden sämtlicher Determinanten (3):

*Sind* $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu$ *die sämtlichen Wurzeln einer Gruppe, so bestehen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zu jeder von ihnen eine Reihe gehört, in dem Verschwinden der sämtlichen Determinanten*

$$\begin{array}{l} D_{\alpha\beta} \\ D_{\alpha(\beta)\gamma},\ D_{\beta\gamma} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{\alpha(\beta\ldots\mu)\nu},\ D_{\beta(\gamma\ldots\mu)\nu}, \ldots, D_{\mu\nu}\ ^{1}). \end{array}$$

**17. Anwendung auf reguläre Stellen.** Im Artikel 9 haben wir gesehen, dass die zu einer regulären Stelle gehörige determinierende Gleichung die Wurzeln

$$0,\ 1, \ldots, n-1$$

hat. Alle $n$ Wurzeln bilden somit eine einzige Gruppe; zu jeder derselben gehört aber eine Reihe.

Bilden wir nämlich das Gleichungssystem $S$ des Artikel 12, indem wir für $\alpha$ die kleinste Wurzel 0 der Gruppe einsetzen, so lautet dasselbe

$$(15)\quad \begin{cases} 0 = a_{10}c_0 + a_{11}c_1 \\ 0 = a_{20}c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2\ . \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = a_{n-1,0}\,c_0 + a_{n-1,1}\,c_1 + a_{n-1,2}\,c_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}c_{n-1}\ . \end{cases}$$

Da nun, wie wir schon im Artikel 9 hervorgehoben haben,

$$\begin{array}{lll} a_{kk} & \text{durch}\ k(k-1)\ \ldots & (k-n+1) \\ a_{k\,k-1} & \quad ,, \quad\ \ (k-1)\ \ldots & (k-n+1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k,k-n+1} & \text{durch} & (k-n+1) \end{array}$$

teilbar ist, so sind die sämtlichen Coefficienten $a_{ks}$ im System (15) $= 0$, d. h. $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ bleiben willkürlich:

---

1) Mit diesem Resultat kann man z. B. die zuerst von Fuchs (Crelles Journ. Bd. 68. (1868) S. 375—378) aufgestellten Bedingungen für die gleiche Frage, sowie die von Frobenius (Crelles Journ. Bd. 76 (1873) S. 224—226) vergleichen. Zu der letzteren Vergleichung siehe auch des Verfassers Hab.-Schrift S. 31. 32. — Der hier erst lernende Leser wird allerdings vielleicht jetzt noch nicht die Identität der dort und hier behandelten Fragen erkennen können.

*Bei einer regulären Stelle gehört zu jeder Wurzel der Gruppe* $0, 1, .., n-1$ *eine Reihe oder — mit anderen Worten — gehört zu* $0$ *eine Reihe, deren* $n$ *erste Coefficienten willkürlich bleiben, während alle folgenden sich linear und homogen durch diese ausdrücken.*

## 18. Weitere Beispiele.

*1. Beispiel:* Bei dem in Artikel 10 als erstes behandeltem Beispiel

$$x^{n-\varrho}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-\varrho-1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{P}_{n-\varrho} y^{(\varrho)} + \cdots + \mathfrak{P}_n y = 0$$

besass die determinierende Gleichung u. a. die Wurzeln

$$0, 1, .., \varrho - 1.$$

*Wir wollen nun voraussetzen, dass unter den* $n-\varrho$ *übrigen Wurzeln keine vorkomme, die gleich einer ganzen Zahl* $> \varrho - 1$ *ist.*

Dann folgt aus einer schon im Artikel 10 gemachten Bemerkung über die Grössen $a_{kk}, a_{k,k-1}, \ldots, a_{k,k-\varrho+1}$ gerade wie im vorangehenden Artikel bei einer regulären Stelle, *dass zu jeder der Wurzeln* $0, 1, .., \varrho - 1$ *eine Reihe gehört.*

*2. Beispiel:* Die Gauss'sche Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta \,.\, y = 0$$

(s. Art. 10) hat bei $x = 0$ $0$ und $1-\gamma$ als Wurzeln der determinierenden Gleichung, welche eine *Gruppe* bilden, *wenn* $\gamma$ *ganzzahlig oder* $= 0$ *ist.*

a) $\gamma$ *sei eine negative ganze Zahl oder Null.* Dann ist $1-\gamma$ die grössere der beiden Wurzeln, zu der also immer eine Reihe gehört. Es fragt sich, unter welchen Bedingungen auch zu der Wurzel $0$ eine eine solche gehört.

Da die Recursionsformel

$$a_{k,k-1}c_{k-1} + a_{kk}c_k = (k+\alpha-1)(k+\beta-1)c_{k-1} - k(k+\gamma-1)c_k = 0,$$

lautet, so wird das System $S$ hier

$$\begin{array}{l} 0 = a_{10}c_0 + a_{11}c_1 \\ 0 = \qquad\quad a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0 = \qquad\qquad\qquad a_{-\gamma,-\gamma-1}c_{-\gamma-1} + a_{-\gamma,-\gamma}c_{-\gamma} \\ 0 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{1-\gamma,-\gamma}c_{-\gamma} \end{array}$$

und die Determinante $D_{0,1-\gamma}$, deren Verschwinden hier allein notwendig und hinreichend ist, wird

$$a_{10}\cdot a_{21}\cdots a_{1-\gamma,-\gamma} = \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma).$$

Damit dieser Ausdruck verschwindet, muss also $\alpha$ oder $\beta$ einen der Werte haben $0, -1, -2, \ldots, \gamma$.

b) $\gamma$ *sei eine positive ganze Zahl,* deren Wert jedoch $> 1$ sein soll, da wir sonst zwei gleiche Wurzeln hätten (was sich später erledigen wird), also unsere jetzige Frage gar nicht aufwerfen könnten. In diesem Fall ist 0 die grössere Wurzel, zu der sicher eine Reihe gehört.

Um zu entscheiden, wann auch zu $1-\gamma$ eine solche gehört bilden wir das System $S$, welches jetzt lautet

$$\begin{array}{llllll}
0 = a_{2-\gamma,1-\gamma}c_{1-\gamma} + a_{2-\gamma,2-\gamma}c_{2-\gamma} & & & & \\
0 = & a_{3-\gamma,2-\gamma}c_{2-\gamma} + a_{3-\gamma,3-\gamma}c_{3-\gamma} & & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & & & \\
0 = & & a_{-1,-2}c_{-2} + a_{-1,-1}c_{-1} & & \\
0 = & & & a_{0,-1}c_{-1} &
\end{array}$$

und dessen Determinante

$$D_{1-\gamma,0} = a_{2-\gamma,1-\gamma}\cdot a_{3-\gamma,2-\gamma}\cdot\cdot\cdot a_{0,-1}$$

den Wert hat

$$(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+2)\ldots(\alpha-1)(\beta-1).$$

Sie verschwindet, wenn $\alpha$ oder $\beta$ einen der Werte hat

$$1, 2, \ldots, \gamma-2, \gamma-1.$$

Wir haben also das Ergebnis:

*Wenn in der Gauss'schen Differentialgleichung $\gamma$ ganzzahlig oder Null ist, so gehört dennoch zu beiden Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung eine Reihe, falls mindestens eine der beiden Grössen $\alpha$, $\beta$ ebenfalls diesen Charakter und zwar, wenn $\gamma < 0$, einen der Werte $0, -1, \ldots, \gamma$, wenn aber $\gamma > 1$, einen der Werte $1, 2, \ldots, \gamma - 1$ hat.*

## Kapitel III.

### Nachweis der Reihenconvergenz bei einer Stelle der Bestimmtheit[1]).

**19. Begründung der Beschränkung auf Stellen der Bestimmtheit; vereinfachende Annahmen.** Nachdem im vorigen Kapitel festgestellt worden ist, unter welchen Bedingungen zu einer beliebigen Wurzel $\alpha$ der zu dem Punkt $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung eine Reihe gehört, in dem Sinne, dass die Coefficienten einer wirklich mit $x^\alpha$, nicht erst mit einer höheren Potenz, beginnenden Reihe bis in's Unendliche sich so berechnen lassen, dass die Differentialgleichung durch dieselbe identisch erfüllt wird, tritt nun die Frage auf, *ob diese Reihe convergiert.* Erst dann stellt dieselbe ja eine Function von $x$, und da diese die Differentialgleichung befriedigt, ein *Integral* dar.

Zunächst ist leicht zu zeigen, dass, *wenn $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit ist, die Reihe im Allgemeinen nicht convergieren kann.* In diesem Fall ist nämlich in der Recursionsformel

$$F_{k\alpha} = a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\alpha+1} c_{\alpha+1} + \cdots + a_{kk-1} c_{k-1} + a_{kk} c_k = 0$$

$a_{kk}$ in $k$ von niedrigerem Grad als $n$, während mindestens eine der Grössen $a_{kk-1}$, $a_{kk-2}, \ldots$, wie aus Formel (7) Artikel 6 folgt, vom $n^{\text{ten}}$ Grad in $k$ ist. Bildet man daher $c_k$ aus der Recursionsformel, so ist dies eine lineare Function der vorhergehenden $c$ mit Coefficienten, welche mit wachsendem $k$ ihrem absoluten Betrag nach zum Teil unendlich werden. Infolge dessen wird *im Allgemeinen* — wenn nicht besondere Beziehungen eintreten — $|c_k|$ mit unendlich wachsendem $|k|$ selbst unendlich werden, wodurch die Convergenz ausgeschlossen ist. Welcher Art solche Beziehungen sein müssen, werden wir später erkennen, wenn wir dem Fall, dass eine determinierende Gleichung bei $x = 0$ zwar existiert, aber nicht von Grad $n$ ist (im Kap. XIII) eine eingehende Betrachtung widmen.

1) Dieser Convergenzbeweis ist abgesehen von unwesentlichen Aenderungen, welche wegen des weitergehenden Beweisgegenstandes nötig waren oder zur Vereinfachung dienen sollten, der von Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866). S. 148 bis 152.

Ist dagegen $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, kann also bei $x = 0$ die Differentialgleichung in die Gestalt (10′) des Artikel 8 gebracht werden:

$$(1) \qquad x^n y^{(n)} + x^{n-1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + x^{n-2}\mathfrak{P}_2 y^{(n-2)} + \cdots + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

wo die $\mathfrak{P}$ keine negativen Potenzen von $x$ enthalten, so lässt sich die Convergenz jeder ihr formal genügenden Reihe darthun.

Wir setzen ferner voraus, dass die Zahl $\alpha$ gleich Null sei, und dürfen dies unbeschadet der Allgemeingültigkeit des Beweises. Ist nämlich $\alpha$ von Null verschieden, so setzen wir in der Differentialgleichung (1)

$$y = x^\alpha . u$$

und erhalten dadurch nach Weglassung des Faktors $x^\alpha$, wenn zur Abkürzung wie üblich gesetzt wird

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda} = \binom{n}{\lambda},$$

für $u$ die Differentialgleichung

$$(2) \begin{cases} u^{(n)}.x^n \\ + u^{(n-1)}x^{n-1}\left[\binom{n}{1}\alpha + \mathfrak{P}_1\right] \\ + u^{(n-2)}x^{n-2}\left[\binom{n}{2}\alpha(\alpha-1) + \binom{n-1}{1}\alpha\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots \\ + u.[\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)\mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_n] = 0, \end{cases}$$

welche in $x = 0$ wieder eine Stelle der Bestimmtheit besitzt. Wenn nun aber

$$\eta = \sum_{\substack{(k) \\ (k=\alpha,\,\alpha+1,\ldots)}} c_k x^k = x^\alpha . \sum_{(k=0,1,2,\ldots)} c_k x^k,$$

wo $c_0 \neq 0$ ist, die Differentialgleichung (1) formal befriedigt, so befriedigt notwendig $u = \sum\limits_{(k)} c_k x^k$ $(k=0,1,\ldots)$ die Differentialgleichung (2) formal, d. h. unsere Reihe für $\eta$ kann nach Ablösung des Faktors $x^\alpha$ wieder als aus einer Differentialgleichung hervorgehend betrachtet werden, welche ganz analoge Gestalt wie (1) aber statt $\alpha$ die Null als Wurzel der determinierenden Gleichung besitzt; denn sonst könnte (2) ja nicht eine mit einer Constanten beginnende Reihe $\Sigma c_k x^k$ $(k=0,1,\ldots)$ liefern. Daher dürfen wir von vornherein annehmen, dass bei Gleichung (1) $\alpha$ gleich Null sei, d. h. die determinierende Gleichung die Gestalt habe

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_{kk} = {} & k(k-1)\ldots(k-n+1) \\ & + \mathfrak{P}_1(0)k\ldots(k-n+2) + \cdots + k\mathfrak{P}_{n-1}(0) = 0, \end{aligned}$$

weil zufolge unserer jetzigen Annahme $\mathfrak{P}_n(0)$ gleich Null ist. Die Zahlen $\beta, \gamma, .., \nu$ des Kap. II aber sind jetzt positive ganze Zahlen.

Es ist daher nun zu beweisen, dass die Reihe

$$(4) \qquad \eta = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^k ,$$

deren Coefficienten nach der Recursionsformel

$$(5) \qquad a_{k0} c_0 + a_{k1} c_1 + \cdots + a_{k\,k-1} c_{k-1} + a_{kk} c_k = 0$$

gebildet sind, wobei $c_0$ willkürlich bleibt, alle andern $c$ aber, wenn wir uns die willkürlich bleibenden gleich Null gesetzt denken, Multipla von $c_0$ sind, in einem Kreis um den Punkt $x = 0$ mit von Null verschiedenem Radius convergiert.

**20. Hülfsdifferentialgleichung und Hülfsreihe.** Zu dem Ende setzen wir (1), nachdem der wegen des Verschwindens von $\mathfrak{P}_n(0)$ allen Coefficienten gemeinsame Faktor $x$ weggelassen ist, in die Gestalt

$$(6) \qquad x^{n-1} y^{(n)} + x^{n-2} \mathfrak{P}_1(0) y^{(n-1)} + x^{n-3} \mathfrak{P}_2(0) y^{(n-2)} + \cdots + \mathfrak{P}_{n-1}(0) y'$$
$$= x^{n-1} \frac{\mathfrak{P}_1(0) - \mathfrak{P}_1(x)}{x} y^{(n-1)} + \cdots + x \frac{\mathfrak{P}_{n-1}(0) - \mathfrak{P}_{n-1}(x)}{x} y' - \frac{\mathfrak{P}_n(x)}{x} y .$$

Hier sind nämlich auf der linken Seite diejenigen Terme von den andern abgesondert, welche allein zur Bildung von $a_{kk} c_k$ in der Recursionsformel (5) und nur zu diesem Glied beitragen, sodass also auf der rechten Seite die Terme stehen, aus denen der Rest der Recursionsformel mit entgegengesetztem Zeichen entsteht

$$- a_{k0} c_0 - a_{k1} c_1 - \cdots - a_{k\,k-1} c_{k-1} .$$

Nach den einleitenden Erörterungen sind nun die $\mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(x), .., \mathfrak{P}_n(x)$ gleichzeitig convergent in der sogenannten Umgebung von $x = 0$, d. h. im Innern eines Kreises um den Punkt $x = 0$, der sich bis zum nächstliegenden singulären Punkt erstreckt, — wenn also diese Entfernung mit $r$ bezeichnet wird — im Innern des Kreises mit dem Radius $r$ und $x = 0$. Das Gleiche gilt also von den Reihen

$$(7) \qquad \frac{\mathfrak{P}_1(x) - \mathfrak{P}_1(0)}{x}, \quad \frac{\mathfrak{P}_2(x) - \mathfrak{P}_2(0)}{x}, \ldots, \frac{\mathfrak{P}_n(x)}{x},$$

und der absolute Betrag von jeder derselben sei im Innern dieses Kreises bezw. kleiner als die positiven Zahlen

$$M_1, \; M_2, \ldots, M_n .$$

Ferner sei $\gamma$ ein beliebiger positiver echter Bruch und die Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_{n-1}$ bestimmt durch die Identität

$$(8) \qquad \gamma k^n = \gamma k(k-1)..(k-n+1) + \gamma_1 k..(k-n+2) + \cdots + \gamma_{n-1} . k .$$

Setzt man nämlich hierin die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $k$ auf beiden Seiten einander gleich, so bleibt $\gamma$ unbestimmt, kann also den ihm schon vorher erteilten willkürlichen Wert annehmen, während $\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}$ dem Gleichungssystem zu genügen haben

$$0 = -\gamma \frac{n(n-1)}{2} + \gamma_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = (-1)^{n-1}\gamma(n-1)! + (-1)^{n-2}\gamma_1(n-2)! + \cdots + \gamma_{n-1}.$$

Dieses ist linear und nicht homogen für $\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}$ und hat die von Null verschiedene Determinante 1, sodass es in der That zur Berechnung der Grössen $\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}$ geeignet ist.

Dann bilden wir die Hülfsdifferentialgleichung:

$$(6^a) \qquad \gamma x^{n-1}u^{(n)} + \gamma_1 x^{n-2}u^{(n-1)} + \cdots + \gamma_{n-1}u'$$
$$= x^{n-1}\frac{M_1}{1-\frac{x}{r}}u^{(n-1)} + x^{n-2}\cdot\frac{M_2}{1-\frac{x}{r}}u^{(n-2)} + \cdots + \frac{M_n}{1-\frac{x}{r}}u,$$

welche gleich in einer der Differentialgleichung (6) analogen Gestalt gegeben ist. Demnach ist die zu $x=0$ gehörige determinierende Gleichung von (6ᵃ) unter Berücksichtigung von (8)

$$(3^a) \qquad \gamma\,.\,k^n = 0$$

und hat die $n$-fache Wurzel Null. Da es also keine um eine ganze Zahl grössere Wurzel giebt, gehört zu Null eine Reihe

$$(4^a) \qquad u = \sum_{k=0}^{k=\infty} g_k x^k,$$

welche (6ᵃ) formal erfüllt, wenn ihre Coefficienten, von denen $g_0$ willkürlich bleibt, alle andern Multipla von $g_0$ sind, nach der Recursionsformel

$$(5^a) \qquad b_{k0}g_0 + b_{k1}g_1 + \cdots + b_{k\,k-1}g_{k-1} = \gamma\,.\,k^n\,.\,g_k$$

berechnet werden. Die Grössen $b_{ks}$ $(s = 0, 1, .., k-1)$ gehen dabei aus den $a_{ks}$ in (5) hervor, wenn nur die Coefficienten der Reihen (7) durch die entsprechenden Coefficienten der für $|x| < r$ convergenten Reihen

$$(7^a) \qquad \frac{M_1}{1-\frac{x}{r}},\ \frac{M_2}{1-\frac{x}{r}},\ \ldots,\ \frac{M_n}{1-\frac{x}{r}}$$

ersetzt werden, deren Coefficienten sämtlich positiv sind.

**21. Convergenz der Hülfsreihe.** Die Coefficienten der Hülfsreihe (4ᵃ) sind sämtlich positiv, sobald man das willkürliche $g_0$

positiv wählt. In ($5^a$) nämlich ist für alle vorkommenden Werte von $k$, d. h. für $k = 1, 2\ldots$, rechts $\gamma \cdot k^n$ positiv und links alle $b_{k0}$, $b_{k1}, \ldots, b_{k\,k-1}$ als Summen von Produkten aus positiven Zahlen (nämlich den Zahlen $k(k-1)\ldots(k-\lambda+1)$ u. s. w. und den Coefficienten der Reihen ($7^a$)) ebenfalls positiv. Setzt man also

$$g_k = \mathfrak{B}_k \cdot g_0,$$

so ist hiernach $\mathfrak{B}_k$ stets positiv, folglich alle $g_k$ desgleichen, sobald $g_0$ positiv genommen wird.

Um nun die Convergenz der Reihe ($4^a$) darzuthun, kann man für diese noch eine von ($5^a$) verschiedene, nur zwei auf einander folgende Coefficienten enthaltende Recursionsformel aufstellen. Multipliciert man nämlich zunächst ($6^a$) mit $1 - \frac{x}{r}$, substituiert für $u$ die Reihe ($4^a$) und bestimmt auf beiden Seiten den Coefficienten von $x^{k-1}$, so folgt unter Berücksichtigung von (8) und der aus (8) durch Vertauschung von $k$ mit $k-1$ hervorgehenden Gleichung die Formel

$$(5^{a\prime}) \quad g_k \cdot \gamma k^n = g_{k-1}\left[\frac{\gamma}{r}(k-1)^n + M_1(k-1)\ldots(k-n+1) + \cdots + M_n\right].$$

Es ist also

$$\lim_{k=\infty} \frac{g_k}{g_{k-1}} = \frac{1}{r}.$$

Mithin nähert sich der absolute Betrag des Gliederquotienten der Reihe ($4^a$) dem Wert

$$\lim_{k=\infty} \left|\frac{g_k}{g_{k-1}} \cdot x\right| = \frac{|x|}{r},$$

also einer Grenze, die $< 1$, wenn $|x| < r$; d. h. *die Reihe* ($4^a$) *convergiert im Innern des Kreises mit dem Radius* $r$ *und dem Mittelpunkt* $x = 0$, also in demselben Kreis, in dem auch die sämtlichen Coefficienten convergieren, in der ganzen Umgebung von $x = 0$.

**22. Convergenz der vorgelegten Reihe.** Die Beschaffenheit der eingeführten Hülfsgleichung und der aus ihr entspringenden Reihe ($4^a$) ist ferner derart, dass jeder Coefficient der letzteren grösser ist als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten von (4), wenn die positive Zahl $g_0$ noch entsprechend bestimmt wird, d. h. dass unter dieser Voraussetzung für alle Werte von $k$

$$g_k > |c_k|$$

ist.

Zum Beweise dieser Behauptung bedürfen wir des functionentheoretischen Satzes[1]): „Wenn der absolute Betrag einer gewöhnlichen Potenzreihe im Innern ihres Convergenzkreises mit dem Radius $r$ stets kleiner als die positive Zahl $M$ ist, so ist für jeden Wert der Zahl $n$ der Coefficient der $n^{\text{ten}}$ Potenz in der Reihe absolut genommen kleiner als

$$\frac{M}{r^n}\text{“}.$$

Wenden wir diesen Satz auf die Reihen (7) an und erinnern uns der Definition der Zahlen $M_1, M_2, \ldots, M_n$, welche in den Reihen ($7^a$) auftreten, so haben wir zunächst das Resultat, dass die absoluten Beträge der Coefficienten der Reihen (7) bezw. kleiner sind als die entsprechenden Coefficienten der Reihen ($7^a$). Daraus folgt aber in Anbetracht der Bildung der Grössen $a_{ks}$ und $b_{ks}$ und, wenn noch der Satz in Anwendung kommt, dass der Modul einer Summe höchstens ebenso gross ist als die Summe der Moduln,

$$|a_{ks}| < b_{ks} \qquad \text{für} \begin{Bmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 0, 1, \ldots, k-1 \end{Bmatrix}.$$

Wäre also bis zu irgend einem Wert von $k$ hin das Bestehen der Ungleichung

$$(9) \qquad |c_{k-1}| < g_{k-1}$$

bereits erwiesen, so hätte man dann auch

$$|a_{k0}c_0 + a_{k1}c_1 + \cdots + a_{k\,k-1}c_{k-1}| < b_{k0}g_0 + b_{k1}g_1 + \cdots + b_{k\,k-1}g_{k-1},$$

also nach (5) und ($5^a$)

$$|a_{kk}c_k| < \gamma k^a g_k$$

und folglich, wenn von *demselben* Wert von $k$ an noch für alle Werte von $k$

$$(10) \qquad |a_{kk}| > \gamma k^a$$

wäre, so würde Ungleichung (9) auch für den nächst grösseren Wert von $k$ gelten und weiter für alle Werte von $k$.

Nun ist aber, da $\gamma$ ein positiver echter Bruch und nach einem bekannten Satz der Algebra[2]) für ein hinreichend grosses $k$ die ganze rationale Function $a_{kk}$ sich von ihrem höchsten Gliede $k^a$ beliebig wenig unterscheidet, (10) von einem bestimmten endlichen Wert von $k$, etwa von $k = t$ an, erfüllt. Folglich braucht nur noch gezeigt zu

1) Vergl. Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionentheorie, Berlin, 1886, S. 93. 94.

2) Vergl. z. B. Serret, Cours d'Algèbre supérieure, 4me ed., Paris 1877. tom. I. S. 93.

werden, dass (9) durch Wahl von $g_0$ für $k = 1, 2, \ldots, t$ erfüllt werden kann. Es ist

$$c_k = \mathfrak{A}_k \cdot c_0, \quad g_k = \mathfrak{B}_k \cdot g_0,$$

worin die $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$ ganz bestimmte Grössen, die $\mathfrak{B}_k$ speziell positiv, $c_0$ völlig willkürlich und $g_0$ nur der Beschränkung, positiv zu sein, unterworfen ist. Sei daher unter den Zahlen

$$1, |\mathfrak{A}_1|, \quad |\mathfrak{A}_2|, \ldots, |\mathfrak{A}_{t-1}| \qquad \mathfrak{A} \text{ die grösste}$$

und unter den Zahlen

$$1 \quad \mathfrak{B}_1 \qquad \mathfrak{B}_2 \quad , \ldots, \quad \mathfrak{B}_{t-1} \qquad \mathfrak{B} \text{ die kleinste}$$

und dann $g_0$ gemäss der stets erfüllbaren Bedingung bestimmt

$$\mathfrak{A}\,|c_0| < \mathfrak{B} \cdot g_0,$$

so besteht (9) offenbar für alle Werte von $k$, die $< t$ sind.

Damit ist die zu Anfang dieses Artikels aufgestellte Behauptung

$$g_k > |c_k|$$

für *alle* Werte von $k$ und folglich die Convergenz der Reihe (4) in demselben Kreis wie die von (4^a) erwiesen.

Wir können daher das Resultat dieses Kapitels folgendermassen aussprechen:

*Wenn $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, so convergiert eine jede Reihe, die sich daselbst bestimmt verhält und der Differentialgleichung formal genügt,* d. h. *deren Coefficienten aus der Recursionsformel berechnet werden, in der ganzen Umgebung des Punktes $x = 0$ oder im Innern des Kreises um $x = 0$ als Mittelpunkt, der durch den nächsten singulären Punkt hindurchgeht.*

Hiermit ist aber der Nachweis der Existenz von Integralen unserer Differentialgleichung erbracht. Denn da die regulären Stellen derselben ja Stellen der Bestimmtheit sind, so besitzen wir nunmehr bei jeder regulären Stelle $n$ Integrale in Reihenform, welche bezw. mit der $0^{\text{ten}}$, $1^{\text{ten}}, \ldots, n-1^{\text{ten}}$ Potenz beginnen.

Das Hauptergebnis der ganzen bisherigen Untersuchung können wir daher in dem Satz zusammenfassen, der die Grundlage für alles Folgende bildet:

*Bei jeder regulären Stelle $x = a$ besitzt die Differentialgleichung $n$ Integrale in Gestalt gewöhnlicher Potenzreihen von $x - a$, die bezw. mit der $0^{\text{ten}}$, $1^{\text{ten}}, \ldots, n - 1^{\text{ten}}$ Potenz von $x - a$ beginnen.*

**23. Beispiele.** Ausser durch die Integrale bei einer regulären Stelle wollen wir die Convergenzuntersuchung dieses Kapitels noch durch einige andere Beispiele illustrieren.

*1. Beispiel:* die Gauss'sche Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0$$

(s. Art. 10) hatte bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, deren Umgebung, da $x = 1$ der einzige andere singuläre Punkt im Endlichen ist, der Kreis um $x = 0$ mit dem Radius 1 ist. Die zugehörige Recursionsformel lautete

$$c_k \cdot k(k + \gamma - 1) = c_{k-1}(k + \alpha - 1)(k + \beta - 1).$$

Nehmen wir also an, dass zu der Wurzel $k = 0$ der determinierenden Gleichung eine Reihe gehört, d. h. dass entweder $\gamma$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl oder aber, wenn jenes der Fall wäre, die im Artikel 18 aufgestellte Bedingung erfüllt sei, so können wir den willkürlichen Anfangscoefficienten der Reihe $c_0 = 1$ setzen und erhalten dann nach der Recursionsformel

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}, \quad c_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}, \ldots.$$

Die mit diesen Coefficienten gebildete Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \cdots$$

bezeichnet man nach Gauss durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x)$$

und nennt sie die *hypergeometrische Reihe* oder *Gauss'sche F-Reihe*. Nach dem Hauptsatz des gegenwärtigen Kapitels haben wir also in Verbindung mit den Bemerkungen des Artikel 18 das Resultat:

*Die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ convergiert für beliebige Werte von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ im Innern des Kreises um $x = 0$ mit dem Radius 1; nur wenn $\gamma$ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist, muss eine der Zahlen $\alpha$, $\beta$ einen der Werte $0, -1, -2, \ldots, \gamma$ haben.*

In der That sieht man ja aus der expliciten Gestalt der Reihe unmittelbar, dass in dem letztgenannten Fall die Coefficienten unendlich werden, wenn weder $\alpha$ noch $\beta$ einen der angegebenen Werte hat.

Gehört auch zu $1 - \gamma$ eine Reihe (s. Artikel 18) und setzt man wieder deren ersten Coefficienten $= 1$, so zeigt die Recursionsformel, dass diese Reihe lautet

$$x^{1-\gamma} \cdot F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x),$$

deren Convergenzbedingungen entweder wieder wie vorher aus dem Satz im vorigen Artikel und aus Artikel 18 oder aber unmittelbar aus den oben schon aufgestellten Convergenzbedingungen der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ abzulesen sind.

Dieselbe Differentialgleichung hat auch bei $x = 1$ (s. Art. 10) eine Stelle der Bestimmtheit, deren Umgebung der Kreis um $x = 1$ mit dem Radius 1 ist. Die Recursionsformel lautet hier

$$c_k k(k + \alpha + \beta - \gamma) + c_{k-1}(k + \alpha - 1)(k + \beta - 1) = 0.$$

Gehört daher zu den Wurzeln 0 und $\gamma - \alpha - \beta$ der determinierenden Gleichung eine Reihe, was wie in Art. 18 zu entscheiden ist, so lauten diese Reihen (bei denen wir das Argument $1 - x$ statt $x - 1$ nennen, damit alle Glieder gleiches Vorzeichen haben)

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma;\ 1 - x)$$

und

$$(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1;\ 1 - x),$$

deren Convergenzbedingungen sich wieder aus denen für $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ direct ablesen lassen.

*2. Beispiel:* Die Differentialgleichung

$$x^3 y'' + xy' - x(1 + x^2)y = 0 \tag{11}$$

liefert bei der ausserwesentlich singulären Stelle $x = 0$ die Recursionsformel

$$F_{k\alpha} \equiv kc_k + [(k-1)(k-2) - 1]c_{k-1} - c_{k-3} = 0. \tag{12}$$

Die determinierende Gleichung ($k = 0$) ist von niedrigerem Grad als die Ordnung der Differentialgleichung; also ist $x = 0$ Stelle der Unbestimmtheit; trotzdem convergiert hier die zu Null gehörige Reihe. Es ist nämlich

$$F_{k\alpha} \equiv kc_k - c_{k-1} + (k-2)[(k-1)c_{k-1} - c_{k-2}] + (k-2)c_{k-2} - c_{k-3}. \tag{13}$$

Folglich ist die Recursionsformel (12) für alle Werte von $k$ ($k = 0, 1, 2, ..$) erfüllt, wenn für dieselben Werte die einfachere Recursionsformel

$$G_{k\alpha} \equiv kc_k - c_{k-1} = 0 \tag{14}$$

erfüllt ist. Setzt man aber das erste, willkürlich bleibende $c_0 = 1$, so giebt (14) die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x,$$

welche convergiert und — wie man sich leicht überzeugt — in der That der Gleichung (11) genügt.

*Gleichung (11) giebt also ein Beispiel dafür, dass auch bei einer Stelle der Unbestimmtheit, wenn daselbst eine determinierende Gleichung überhaupt existiert, die zugehörige Reihe convergieren kann.*

*3. Beispiel:*

$$x^3 y'' + x(2x - 1)y' + y = 0$$

liefert bei der ausserwesentlich singulären Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ die Recursionsformel

$$F_{k\alpha} \equiv k(k-1)c_{k-1} - (k-1)c_k = 0,$$

wo wir beiläufig bemerken, dass

$$F_{k\alpha} \equiv (k-1)G_{k\alpha},$$

wenn

$$G_{k\alpha} \equiv k c_{k-1} - c_k$$

gesetzt wird.

Die determinierende Gleichung hat die Wurzel **1**; daher erhalten wir aus der Recursionsformel die Reihe

$$y \equiv c_1[1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots],$$

welche der Differentialgleichung genügt, aber für jeden noch so kleinen Wert von $x$ *divergiert.*

Die beiden letzten Beispiele zeigen also einstweilen, *dass bei einer Stelle der Unbestimmtheit, wenn die determinierende Function nicht eine Constante*, d. h. *von k unabhängig ist, sowohl eine convergente, sich bestimmt verhaltende Reihe existieren, als auch das Gegenteil der Fall sein kann.*

## Kapitel IV.

### Fundamentalsystem von Integralen. Nicht homogene Differentialgleichungen.

**24. Feststellung der nächsten Aufgaben.** Der im vorigen Kapitel als Hauptresultat der bisherigen Untersuchung gewonnene Satz kann füglich als *Fundamentalsatz* unserer ganzen Theorie bezeichnet werden, weil er die Existenz von Integralen begründet. Er zieht zugleich eine Trennungslinie zwischen den Stellen der Bestimmtheit und denen der Unbestimmtheit: bei den ersteren *convergiert* jede formal der Differentialgleichung genügende Reihe, bei den letzteren existiert *im Allgemeinen keine sich bestimmt verhaltende convergente Reihe, welche der Differentialgleichung genügt.* Hiernach wird sich auch die weitere Untersuchung des Verhaltens der Integrale in der Umgebung der einzelnen Stellen spalten und sich zunächst denen der ersten Art zuwenden müssen. Ja, die Kenntnis der Integrale in der Umgebung der Stellen der Bestimmtheit — speziell der regulären Stellen — wird uns überhaupt erst die Mittel liefern, um das Verhalten der Integrale auch bei Stellen der Unbestimmtheit untersuchen zu können.

Ist hiermit der Plan für den Fortgang der Untersuchung in grossen Zügen gekennzeichnet, so lässt der Fundamentalsatz doch zunächst noch die Erledigung einer andern Frage wünschen. Derselbe lieferte uns ja bei einer Stelle der Bestimmtheit mindestens eines und höchstens $n$ Integrale, — wenn man aber berücksichtigt, dass jedes dieser Integrale noch eine willkürliche Constante (den ersten Coefficienten) enthält, — sogar unendlich viele Integrale. Um in dieser unendlichen Fülle eine Uebersicht zu gewinnen und zu erkennen, *in welcher Weise man sämtliche Integrale der Differentialgleichung umfassen kann*, müssen wir auf die Beziehungen eingehen, welche zwischen mehreren Integralen bestehen können.

**25. Beziehungen von Integralen untereinander.** Wir gehen dabei von einer für die linearen homogenen Differentialgleichungen charakteristischen Eigenschaft aus. Sei nämlich

$$(1)\qquad P(x,y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$$

(indem wir uns jetzt die ganze Gleichung durch den Coefficienten von $y^{(n)}$ dividiert denken)[1] eine lineare homogene Differentialgleichung *mit ganz beliebigen Coefficienten* und seien

$$y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$$

Integrale derselben, so ist auch

$$\eta \equiv c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_\lambda y_\lambda$$

ein Integral, wenn $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$ beliebige, von $x$ unabhängige Grössen sind. Denn, setzt man diesen Ausdruck für $y$ in (1) ein, so wird

$$P(x,\eta) \equiv c_1 P(x, y_1) + c_2 P(x, y_2) + \cdots + c_\lambda P(x, y_\lambda) = 0,$$

weil nach Voraussetzung

$$P(x, y_1) = P(x, y_2) = \cdots = P(x, y_\lambda) = 0.$$

Man wird deshalb, wenn $y_{\lambda+1}$ wieder ein Integral von (1) ist, sich aber linear und homogen durch $y_1 y_2 \ldots y_\lambda$ mit von $x$ unabhängigen Coefficienten ausdrücken lässt, dieses Integral nicht als wesentlich von jenen verschieden betrachten können. *Man wird überhaupt $\lambda$ Integrale*

$$y_1 y_2 \ldots y_\lambda$$

*dann und nur dann als untereinander wesentlich verschieden bezeichnen, wenn zwischen ihnen keine lineare homogene Relation mit von $x$ unabhängigen Coefficienten*

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\lambda y_\lambda = 0$$

*besteht, oder wenn dieselben* — wie man sich dafür kurz ausdrückt — *linear unabhängig sind.*

Über linear von einander unabhängige Functionen existiert nun folgender, vielfach von uns zu benutzender Satz:

*Sind*

$$u_1\ u_2 \ldots u_\lambda$$

*irgend welche $\lambda$ Functionen der Variablen $x$, so ist die aus diesen und ihren $\lambda - 1$ ersten Ableitungen gebildete Determinante*

---

1) Wenn es sich um Aufstellung von Formeln handelt, welche in speziellen Fällen zur praktischen Anwendung gelangen können, benutzen wir immer die allgemeinere Gestalt der Differentialgleichung (1) der Einleitung, wo noch nicht durch $p_0$ dividiert ist; so z. B. bei Ableitung der Recursionsformel in Kap. I. Handelt es sich dagegen um den Beweis theoretischer Sätze, so dient es oft zur Vereinfachung, wenn man die Differentialgleichung — wie hier — schon durch $p_0$ dividiert denkt.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \cdots & u_1^{(\lambda-1)} \\ u_2 & u_2' & \cdots & u_2^{(\lambda-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_\lambda & u_\lambda' & \cdots & u_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix},$$

die wir kurz die *Determinante der n Functionen* nennen wollen, *dann und nur dann identisch* (d. h. für jeden Wert von $x$) *gleich Null, wenn* $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ *linear abhängig sind*[1]).

**26. Ausdruck der Coefficienten der Differentialgleichung durch $n$ linear unabhängige Integrale.** Gesetzt nun, man hätte $n$ linear unabhängige Integrale

$$y_1\ y_2 \ldots y_n$$

der Differentialgleichung (1), so kann man aus den $n$ identischen Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \cdots + p_n y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + p_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + p_n y_2 = 0 \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + p_2 y_n^{(n-2)} + \cdots + p_n y_n = 0 \end{cases}$$

die Coefficienten der Differentialgleichung (1) $p_1\ p_2 \ldots p_n$ durch jene $n$ Integrale ausdrücken. Bezeichnet man nämlich die aus dem System oder der Matrix

$$\begin{matrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n)} \end{matrix}$$

zu bildenden Determinanten, wenn man die erste, zweite, u. s. w. $(n+1)^{\text{te}}$ Colonne streicht, bezw. mit

$$D_n,\ D_{n-1}, \ldots,\ D_1,\ D,$$

so ist insbesondere

$$(3)\qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

d. h. die Determinante der $n$ Functionen $y_1\ y_2 \ldots y_n$, nach dem ange-

1) Beweis des Satzes im Anhang. — Daselbst findet sich auch die Zusammenstellung einiger anderer Sätze über linear unabhängige Functionen, die wir später gebrauchen.

führten Satz nicht identisch Null. Folglich ergeben sich aus (2) für die Coëfficienten $p$ die Ausdrücke

$$(4) \qquad p_1 = -\frac{D_1}{D}, \quad p_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, p_n = (-1)^n \frac{D_n}{D}.$$

Setzt man diese in $P(x, y)$ ein und multipliciert die ganze Gleichung (1) mit $(-1)^n D$, so nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an

$$(-1)^n \{y^{(n)} D - y^{(n-1)} D_1 + \cdots + (-1)^n y D_n\} = 0$$

oder

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \ldots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & y_n'' & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir haben also das Resultat:

*Sind* $y_1\, y_2 \ldots y_n$ *n linear unabhängige Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung* (1), *so kann man deren Coefficienten in der Form* (4) *durch diese Integrale ausdrücken oder — was dasselbe ist — die ganze Differentialgleichung nach Multiplication mit der Determinante der n Integrale in die Determinantenform* (5) *setzen.*

**27. Fundamentalsystem von Integralen.** Da man also aus $n$ linear unabhängigen Integralen die Coefficienten der Differentialgleichung selbst berechnen kann, folgt, dass durch solche $n$ Integrale jedes andere Integral der Differentialgleichung bestimmt sein muss. Wir wollen deshalb sagen:

*n linear unabhängige Integrale oder* — w. d. i. — *n Integrale, deren Determinante nicht identisch Null ist, bilden ein* ***Fundamentalsystem von Integralen.*** Die einzelnen Integrale $y_1\, y_2 \ldots y_n$ sollen *die Elemente, D die Determinante des Fundamentalsystems* heissen.

Die Gestalt (5) der Differentialgleichung zeigt unmittelbar, dass dieselbe identisch erfüllt wird, wenn man $y = y_1, y_2, \ldots, y_n$ oder gleich einer beliebigen linearen homogenen Verbindung derselben mit von $x$ unabhängigen Coefficienten setzt. Sie zeigt aber auch umgekehrt, dass *jedes* Integral der Differentialgleichung (1) linear und homogen mit von $x$ unabhängigen Coefficienten durch $y_1\, y_2 \ldots y_n$ ausdrückbar ist. Bedeutet nämlich $y$ irgend ein Integral der Differentialgleichung, so folgt nach (5) und dem in Art. 25 angeführten Satz das Bestehen einer Relation

$$Cy + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n = 0$$

mit von $x$ unabhängigen Coefficienten. Da aber $y_1\ y_2 \ldots y_n$ linear unabhängig sind, kann $C$ nicht Null sein, und die ausgesprochene Behauptung ist erwiesen. Hiermit ist aber die Bezeichnung von $n$ linear unabhängigen Integralen als „Fundamentalsystem von Integralen" in vollstem Masse begründet.

Eine lineare homogene Verbindung der $n$ Elemente eines Fundamentalsystems mit *willkürlichen*, von $x$ unabhängigen Coefficienten

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

nennt man deshalb *das allgemeine Integral der Differentialgleichung*, weil nach dem Vorstehenden *jedes* Integral durch Specialisierung der $c_1\ c_2 \ldots c_n$ daraus hervorgeht oder in jenem Ausdruck enthalten ist. Im Gegensatz dazu nennt man jedes Integral, das weniger als $n$ willkürliche Constanten enthält, *ein partikuläres Integral* oder *eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.*

Gleichzeitig ergiebt sich aus den obigen Bemerkungen der Satz:

*Zwischen $n + 1$ Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung besteht immer eine lineare Abhängigkeit.* Denn, wenn es unter den $n + 1$ Integralen ein Fundamentalsystem giebt, so ist das $(n + 1)^{te}$ Integral durch dessen Elemente ausdrückbar; andernfalls sind schon je $n$ der $n + 1$ Integrale linear abhängig.

Da es nach diesem Satz also eine Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung, welche mehr als $n$ linear unabhängige Lösungen besitzt, nicht giebt, kann man auch die Folgerung aussprechen:

*Weiss man, dass eine lineare homogene Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung von mehr als $n$ linear unabhängigen Functionen erfüllt wird, so folgt daraus, dass sämtliche Coefficienten der Differentialgleichung* (bevor noch durch den Coefficienten von $y^{(n)}$ dividiert ist) $\equiv 0$ *sein müssen.*

Wie dieser Satz an eine bekannte Eigenschaft der *algebraischen Gleichungen* erinnert, so bildet die Gestalt (5) der Differentialgleichung das Analogon zu der Zerlegung des Polynoms einer algebraischen Gleichung in Linearfaktoren, wenn man die Wurzeln $x_1\ x_2 \ldots x_n$ kennt,

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0.$$

Und wie bei der algebraischen Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0$$

die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $x$ symmetrische Functionen der Wurzeln $x_1\ x_2 \ldots x_n$ sind, so zeigen hier die Gleichungen (4), dass die Coefficienten der verschiedenen Ableitungen von $y$ in der linearen homogenen Differentialgleichung (1) symmetrische Functionen

der Elemente eines Fundamentalsystems sind, da $D, D_1, \ldots D_n$ bei Vertauschung von $y_i$ und $y_k$ nur das Zeichen ändern. Dies ist natürlich so zu verstehen, dass man mit der Vertauschung von $y_i$ und $y_k$ gleichzeitig die Vertauschung von $y_i^{(\lambda)}$ und $y_k^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ vornimmt. Man kann sogar zu dem Satz der Algebra, dass jede rationale symmetrische Function der Wurzeln eine rationale Function der Coefficienten ist, hier ein Analogon ableiten. Doch soll auf diese mehr formalen Eigenschaften jetzt nicht weiter eingegangen werden.

Der Hauptinhalt dieses Artikels besteht also in der

*Definition des Fundamentalsystems* und *des allgemeinen Integrals* und in dem Satz:

*Jedes Integral ist linear und homogen mit von $x$ unabhängigen Coefficienten durch die Elemente eines Fundamentalsystems ausdrückbar.*

28. **Die Determinante eines Fundamentalsystems.** Die Determinante eines Fundamentalsystems verschwindet nach der Definition nicht identisch. Wir können aber mittelst der im Artikel 26 gewonnenen Resultate einen Ausdruck für $D$ ableiten, welcher noch weiteren Aufschluss über die Natur dieser Determinante giebt.

Man differenziert nämlich $D$ nach $x$, indem man die Summe der $n$ Determinanten bildet, welche aus $D$ entstehen, wenn jedesmal die Elemente einer anderen der $n$ Colonnen nach $x$ differenziert werden.[1]) Von diesen Determinanten verschwinden aber wegen Uebereinstimmung zweier Colonnen alle bis auf die letzte, welche $D_1$ ist. Man hat also

$$(3') \qquad \frac{dD}{dx} = D_1$$

und daher nach (4)

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dx} = \frac{d}{dx} \log D = -p_1$$

oder durch Integration

$$(6) \qquad D = Ce^{-\int p_1 dx}$$

wo $C$ eine von Null verschiedene Constante ist, weil sonst $D = 0$ wäre. Diese Gleichung lehrt nun zufolge der Eigenschaft der Exponentialfunction, die den Wert Null nur für unendlich grosse Werte des Argumentes annehmen kann, dass $D_n$ nur für solche Werte von $x$ verschwinden kann, für welche $\int p_1 dx$ unendlich wird. Da aber $p_1$ für einen regulären Wert $x = a$ nicht unendlich wird, so kann $D$

1) Vergl. Baltzer, Theorie u. Anwend. d. Det. 5. Aufl. Leipzig 1881. § 3. 15. S. 29 ff.

nur an singulären Stellen der Differentialgleichung verschwinden. Wir haben daher das Resultat:

*Die Determinante eines Fundamentalsystems kann nur an singulären Stellen der Differentialgleichung verschwinden und zwar nur an solchen, wo speziell der Coefficient von $y^{(n-1)}$ — wenn der von $y^{(n)} = 1$ ist — unendlich wird.*

Man kann übrigens die Differentialgleichung durch Einführung einer neuen abhängigen Variabeln $u$ statt $y$ derart transformieren, dass für die neue Differentialgleichung die Determinante des Fundamentalsystems von $x$ unabhängig und daher nach (3′) und (4) der Coefficient der zweithöchsten Ableitung Null wird, was für manche Untersuchungen wünschenswert ist. Setzt man nämlich

(7) $$y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dx} \cdot u$$

oder, was dasselbe ist,

$$y = \sqrt[n]{D} \cdot u,$$

so ist

$$y' = e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dx}\left[u' - \frac{p_1}{n}u\right]$$

$$y'' = e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dx}\left[u'' - 2\frac{p_1}{n}u' + \left(\frac{p_1^2}{n^2} - \frac{p_1'}{n}\right)u\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)} = e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dx}\left[u^{(n-1)} - \frac{n-1}{n}p_1 u^{(n-2)} + \cdots\right]$$

$$y^{(n)} = e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dx}\left[u^{(n)} - p_1 u^{(n-1)} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right].$$

Also wird der Coefficient von $u^{(n-1)}$ in der neuen Differentialgleichung

$$e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dx}\left[-p_1 + p_1\right] = 0,$$

und da der Faktor $e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dx}$ allen Gliedern gemeinsam ist und weggelassen werden kann, erhält man für $u$ eine Differentialgleichung

(8) $$u^{(n)} + q_2 u^{(n-2)} + q_3 u^{(n-3)} + \cdots + q_n u = 0,$$

wo die $q_2\, q_3 \ldots q_n$ ganze Functionen von $p_1\, p_2 \ldots p_n$ und den Ableitungen von $p_1$ sind. Da $q_1 = 0$ ist, ergiebt sich für Differentialgleichung (8) die Determinante eines Fundamentalsystems nach (6) als eine Constante.

**29. Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung bei Kenntnis eines Integrals.**

Wie man den Grad einer algebraischen Gleichung um 1 erniedrigen kann, wenn eine Wurzel derselben bekannt ist, so kann man von der linearen homogenen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung

(1ª) $$P(x, y) \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0,$$

wenn man ein Integral $y = y_1$ besitzt, zu einer Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung übergehen.

Setzt man nämlich

(9) $$y = y_1 \int z\,dx,$$

woraus folgt

(9ª) $$z = \frac{d}{dx}\frac{y}{y_1},$$

so ist

$$\begin{aligned} y' &= y_1' \int z\,dx + y_1 z \\ y'' &= y_1'' \int z\,dx + 2y_1' z + y_1 z' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= y_1^{(n)} \int z\,dx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} z + \binom{n}{2} y_1^{(n-2)} z' + \cdots + y_1 z^{(n-1)}, \end{aligned}$$

und es wird

(10) $$P\left(x, y_1 \int z\,dx\right) = P(x, y_1) \int z\,dx + Q(x, z),$$

wo

(11) $$\begin{aligned} Q(x, z) \equiv\ & z^{(n-1)} \cdot p_0 y_1 \\ & + z^{(n-2)} \left[\binom{n}{1} p_0 y_1' + p_1 y_1\right] \\ & + z^{(n-3)} \left[\binom{n}{2} p_0 y_1'' + \binom{n-1}{1} p_1 y_1' + p_2 y_1\right] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + z \left[\binom{n}{1} p_0 y_1^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} p_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y_1\right]. \end{aligned}$$

Da aber $P(x, y_1) \equiv 0$, so liefert der Ausdruck (9) für $y$ ein Integral der Differentialgleichung (1ª), falls $z$ ein Integral der Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

(12) $$Q(x, z) = 0$$

ist.

Die Beziehung zwischen den Gleichungen (1ª) und (12) ist aber, wie man aus (10) sieht, in dem Sinne eine gegenseitige, dass wir sagen können:

*Jedem Integral $z = \zeta$ von (12) entspricht ein Integral $y = \eta$ von*

$(1^a)$, *das durch* (9) *gegeben wird, und jedem Integral* $y = \eta$ *von* $(1^a)$ *entspricht ein Integral* $z = \zeta$ *von* (12), *das durch* $(9^a)$ *gegeben wird.* (Dem Integral $y = y_1$ von $(1^a)$ entspricht das Integral $z = 0$ von (9)).

Ferner ist leicht zu zeigen, *dass einem Fundamentalsystem der einen Gleichung auch ein solches der andern entspricht.*

Sei nämlich $z_2\, z_3 \ldots z_n$ ein Fundamentalsystem von (12), $y_2\, y_3 \ldots y_n$ die (nach (9)) entsprechenden Integrale von $(1^a)$, denen man als $n^{\text{tes}}$ das Integral $y_1$ hinzufügt. Bestände nun eine identische Relation

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \equiv 0$$

mit von $x$ unabhängigen Coefficienten, so hätte man nach Division durch $y_1$ und Differentiation nach $x$

$$C_2 z_2 + \cdots + C_n z_n \equiv 0$$

gegen die Voraussetzung.

Ist umgekehrt $y_1\, y_2 \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem von $(1^a)$ und sind $z_2\, z_3 \ldots z_n$ die nach $(9^a)$ entsprechenden Integrale von (12), so ist auch eine Relation

$$C_2 z_2 + C_3 z_3 + \cdots + C_n z_n \equiv 0$$

unmöglich, weil daraus durch Integration in Bezug auf $x$, wenn man die Integrationsconstante $C_1$ nennt, und durch Multiplication mit $y_1$ die Relation

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \equiv 0$$

folgen würde.

Wir können daher als Inhalt dieses Artikels aussprechen:

*Ist ein Integral* $y_1$ *einer linearen homogenen Differentialgleichung* $n^{\text{ter}}$ *Ordnung in* $y$ *bekannt, so kann man mittelst der Transformationsgleichung*

$$y = y_1 \int z\, dz \qquad \left(z = \frac{d}{dx}\frac{y}{y_1}\right)$$

*eine Differentialgleichung* $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung in* $z$ *herleiten, sodass jedem Fundamentalsystem der Differentialgleichung in* $z$ *ein solches derjenigen in* $y$ *(wenn man noch* $y_1$ *hinzufügt) entspricht und umgekehrt.*

**30. Fuchs'sche Methode[1]) zur Gewinnung linear unabhängiger Integrale.** Behält man nun von den Integralen von (12) nur eines, etwa $z_2$, bei, so hat man also von $(1^a)$ zwei Integrale

$$y_1, \quad y_1 \int z_2\, dx.$$

Substituiert man dann aber unter Wiederholung der Operation in (12)

$$z = z_2 \int t\, dx, \tag{13}$$

1) S. Crelles Journ. Bd. 66. (1866) p. 129 ff.

so erhält man für $t$ eine Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist $t=t_3$ ein Integral derselben, so ist

$$z_2 \int t_3\, dx$$

ein Integral von (12) und folglich

$$y_1 \int z_2\, dx \int t_3\, dx$$

ein solches von ($1^a$).

So fortfahrend erhält man $\lambda$ $(\lambda < n)$ Integrale

$$(14) \qquad y_1,\ y_1\int z_2\, dx,\ y_1\int z_2\, dx \int t_3\, dx, \ldots, y_1 \int z_2\, dx \int \ldots \int u_\lambda\, dx,$$

der Differentialgleichung ($1^a$), welche *linear unabhängig* sind.

Wäre nämlich identisch

$$(15) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_2\, dx + \cdots + c_\lambda y_1 \int z_2\, dx \int \ldots \int u_\lambda\, dx = 0,$$

so folgte hieraus durch Division durch $y_1$ und durch Differentiation nach $x$

$$c_2 z_2 + \cdots + c_\lambda z_2 \int t_3 \cdots \int u_\lambda\, dx = 0,$$

hieraus ebenso

$$c_3 t_3 + \cdots + c_\lambda t_3 \int \ldots \int u_\lambda\, dx = 0$$

u. s. w. endlich

$$c_\lambda \cdot u_\lambda = 0,$$

also $c_\lambda = 0$. Dann schliesst man ebenso, dass $c_{\lambda-1}=0$, $c_{\lambda-2}=0, \ldots$ $c_1=0$, dass also eine Relation (15) unmöglich ist.

Damit ist die obige Behauptung erwiesen; für $\lambda = n$ bilden also die Integrale (14) ein Fundamentalsystem.

Zwischen den *Determinanten der Fundamentalsysteme* der bei dieser Ableitung benutzten Gleichungen in $y, z, t, \ldots$, die wir mit

$$D,\ D',\ D'',\ \ldots,\ D^{(n-1)}$$

bezeichnen, besteht noch eine bemerkenswerte Beziehung. Die letzte dieser Differentialgleichungen ist für $\lambda = n$ von der ersten Ordnung, ihre abhängige Variable heisse $w$; ihr Integral $w_n$ ist also zugleich die Determinante $D^{(n-1)}$ selbst.

Nun ist nach (6) für Gleichung ($1^a$)

$$D = C \cdot e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx},$$

und für Gleichung (12) folgt ebenso nach (11)

$$D' = C' \cdot e^{-\int \left(n \frac{y_1'}{y_1} + \frac{p_1}{p_0}\right) dx},$$

also

$$(16) \qquad D' = C_1 \cdot y_1^{-n} \cdot D.$$

Entsprechend ergiebt sich

$$D'' = C_2 \,.\, z_2^{-(n-1)} \,.\, D'$$

u. s. w., wo die $C$ immer Constanten bedeuten. Verbindet man alle diese Gleichungen, so erhält man für $D$, die Determinante eines Fundamentalsystems der Gleichung ($1^a$), den Ausdruck

$$(17) \qquad D = C y_1^{\,n} \,.\, z_2^{\,n-1} \,.\, t_3^{\,n-2} \dots w_n .$$

Wir haben also das Resultat:

*Kann man von jeder linearen homogenen Differentialgleichung ein Integral ermitteln, so kann man auch ein Fundamentalsystem für eine beliebige lineare homogene Differentialgleichung in der Gestalt* (14) *aufstellen. Die Determinante eines Fundamentalsystems drückt sich alsdann in der Form* (17) *durch die dabei benutzten Integrale* $y_1, z_2, \dots, w_n$ *der Differentialgleichungen* $n^{\text{ter}}$, $(n-1)^{\text{ter}}$,.. $1^{\text{ter}}$ *Ordnung aus, welche bei dem Verfahren der Reihe nach auftreten.*

**31. Zurückführung der Integration von nicht homogenen auf die Integration von homogenen linearen Differentialgleichungen** [1]**.** Nach den Resultaten des gegenwärtigen Kapitels besteht die vollständige Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung in der Aufstellung eines Fundamentalsystems von Integralen. Angenommen nun, wir könnten für jede homogene Gleichung ein solches finden, so sind wir jetzt in der Lage, den in der Einleitung (Artikel 1) versprochenen Nachweis zu erbringen, dass die Integration von nicht homogenen linearen Gleichungen auf die von homogenen reduciert werden kann.

Sei nämlich

$$(18) \qquad P(x, y) + p(x) \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y + p = 0$$

die vorgelegte nicht homogene Differentialgleichung, so kann man daraus die homogene Differentialgleichung bilden

$$(19) \qquad p \frac{d}{dx}(P + p) - (P + p)\frac{dp}{dx} \equiv \frac{dP}{dx} p - P \frac{dp}{dx} = 0,$$

oder ausführlich geschrieben

$$(19^a) \qquad \begin{aligned} y^{(n+1)} p p_0 + \; & y^{(n)} (p p_0' + p p_1 - p_0 p') \\ & + y^{(n-1)} (p p_1' + p p_2 - p_1 p') \\ & + y^{(n-2)} (p p_2' + p p_3 - p_2 p') \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + y\, (p p_n' - p_n p') = 0, \end{aligned}$$

1) Vgl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 68. (1868) p. 368 ff.

welcher, wie aus der Form (19) ersichtlich, alle Integrale von (18) genügen. Umgekehrt ist aber nicht jedes Integral von (19) ein solches von (18); denn (19) wird ja durch alle Lösungen der sogenannten *reducierten Gleichung* $P = 0$ befriedigt, die offenbar nicht Integrale von (18) sind. Es kommt also darauf an, unter den Integralen von (19) diejenigen zu kennzeichnen, welche zugleich Lösungen von (18) sind.

Zu dem Ende dividieren wir die Gleichung (19) durch $p^2$, sodass sie die Gestalt annimmt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{p}\right) = 0$$

oder nach einmaliger Integration in Bezug auf $x$

$$P = C.p, \tag{20}$$

wo $C$ eine willkürliche, von $x$ unabhängige Grösse bedeutet. Jedes Integral $y = \eta$ von (19) hat also die Eigenschaft, für $y$ in $P(x, y)$ eingesetzt, diesem Ausdruck den Wert $C.p(x)$ zu erteilen. Setzt man nun ein ganz bestimmtes partikuläres Integral $\eta$ ein (welches gar keine willkürliche Constante mehr enthält), so muss auch $C$ eine ganz bestimmte Constante sein. Ist diese $= 0$, so hat man in $\eta$ ein Integral der reducierten Gleichung

$$P(x, y) = 0;$$

ist $C \neq 0$, so ist

$$-\frac{\eta}{C} = \eta_1$$

ein Integral der nicht homogenen Gleichung (18). Denn setzt man $y = \eta_1$, so wird

$$P = -p \quad \text{oder} \quad P + p = 0.$$

Fügt man zu diesem Integral $\eta_1$ noch ein beliebiges Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$P(x, y) = 0$$

hinzu

$$y_1\, y_2 \,.\,.\,.\, y_n,$$

so hat man in

$$\eta_1,\ y_1,\ y_2,\ .\,.\,.\,.\ y_n$$

offenbar ein Fundamentalsystem der Gleichung (19); denn $\eta_1$ ist ja nicht Integral von $P = 0$ und infolge dessen nicht durch $y_1, y_2 \ldots y_n$ ausdrückbar.

Mit diesem Fundamentalsystem umfasst man alle Integrale von (19), folglich, da hierunter alle Integrale von (18) begriffen sind, auch die letzteren sämtlich. Während aber das allgemeine Integral von (19) lautet

$$y = c\eta_1 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$

wo $c, c_1, c_2, \ldots c_n$ ganz willkürliche von $x$ unabhängige Grössen sind, muss hierin, wenn (18) befriedigt werden soll, notwendig $c = 1$ sein. *Das allgemeine Integral der nicht homogenen Gleichung* (18) *ist also*

$$\eta_1 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$

*wo $y_1, y_2 \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem der reducierten Gleichung $P = 0$ und $\eta_1$ ein Integral der homogenen Gleichung* (19) *ist, das nicht zugleich eine Lösung von $P = 0$ ist und dessen Constanten so bestimmt sind, dass $P(x, \eta_1) + p(x) = 0$ ist.* Das Integral $\eta_1$ nennt man wegen seiner ausgezeichneten Stellung auch *Hauptintegral*.

Hiermit ist die Integration der nicht homogenen Gleichung in der That auf diejenige von homogenen Gleichungen zurückgeführt.

Nennen wir $\eta_1, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein *Fundamentalsystem von Integralen der nicht homogenen Gleichung*

$$P(x, y) + p(x) = 0,$$

so kann man die Coefficienten dieser Gleichung ganz ähnlich wie in Artikel 26 durch die Elemente des Fundamentalsystems ausdrücken und der Gleichung selbst die Gestalt geben

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} 1 & y & y' & \ldots & y^{(n)} \\ 1 & \eta_1 & \eta_1' & \ldots & \eta_1^{(n)} \\ 0 & y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

# Kapitel V.

## Die Integrale bei einer regulären Stelle und die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

**32. Übersicht über den Fortgang der Untersuchung.** Nach dem vorigen Kapitel beherrscht man alle Integrale der Differentialgleichung mit dem Besitz eines Fundamentalsystems. Um also das Verhalten sämtlicher Integrale in der Umgebung der einzelnen Werte von $x$ kennen zu lernen, gilt es, für die Umgebung jeder der von uns unterschiedenen Arten von Stellen ein daselbst gültiges Fundamentalsystem aufzustellen oder doch — wo die explicite Aufstellung eines solchen sich als unmöglich erweisen sollte — zu ergründen, welche analytische Gestalt ein daselbst gültiges Fundamentalsystem haben muss.

Diese Aufgabe erledigen wir im gegenwärtigen Kapitel zunächst für die *regulären Stellen* und erhalten dabei zugleich mannigfache Anwendungen für die Untersuchungen des Kap. IV.

Besitzen wir aber alsdann für die Umgebung einer jeden regulären Stelle ein Fundamentalsystem von Integralen, so erhebt sich noch die Frage, welcher *Zusammenhang zwischen allen diesen unendlich vielen Fundamentalsystemen* besteht. Durch die Beantwortung derselben gewinnen wir erst *den Begriff der für das ganze Gebiet der Differentialgleichung mit Ausnahme der singulären Stellen definierten allgemeinen Integralfunction.* (Kap. VI.)

Indem wir darauf in den folgenden Kapiteln (VII, VIII, IX, X) ein für die Umgebung einer *beliebigen* Stelle der Bestimmtheit gültiges Fundamentalsystem aufstellen und untersuchen, lernen wir das *Verhalten der Integralfunction auch bei singulären Stellen der Bestimmtheit* kennen.

Kapitel XI und XII endlich stellen die analytische Gestalt der Integrale *in der Umgebung einer ganz beliebigen singulären Stelle*, also auch in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit, fest.

**33. Verhalten der Integrale bei einer regulären Stelle.** Wenn $x = 0$ eine reguläre Stelle der Differentialgleichung ist, so kann man letztere in die Form setzen

$$(1) \qquad y^{(n)} + \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \mathfrak{P}_2 y^{(n-2)} + \cdots + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind. Obwohl nun die sämtlichen Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung (s. Art. 9) nur eine einzige Gruppe bilden

$$0, 1, \ldots, n-1,$$

gehört dennoch nach Artikel 17 zu jeder derselben eine Reihe oder, wie wir nun auf Grund von Kap. III sagen dürfen, ein Integral in Reihenform. Bezeichnen wir diese $n$ Integrale bezw. mit

$$y_1\ y_2 \ldots y_n$$

und denken uns bei jedem derselben ausser dem willkürlichen Anfangscoefficienten alle andern willkürlich bleibenden Coefficienten (s. Art. 15) gleich Null gesetzt, so bilden $y_1\ y_2 \ldots y_n$ ein *Fundamentalsystem von Integralen;* denn ihre Zahl ist $n$, und eine lineare homogene Relation zwischen ihnen ist ausgeschlossen[1]).

Betrachtet man statt dieses Fundamentalsystems das allgemeine Integral

$$(2) \qquad \eta = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^k$$

wo $C_1\ C_2 \ldots C_n$ willkürliche von $x$ unabhängige Grössen sind, so ist dies eine gewöhnliche Potenzreihe von $x$, deren $n$ erste Coefficienten willkürlich sind. Da aber die Coefficienten dieser Potenzreihe nach dem Taylor'schen Satz die Bedeutung haben

$$c_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k \eta}{dx^k}\right)_{x=0},$$

so kann man auch sagen: *das allgemeine Integral* der Differentialgleichung in der Umgebung einer regulären Stelle $x = 0$ *ist eine Function, die sich in dieser Umgebung selbst regulär verhält und für* $x = 0$ *nebst ihren* $n-1$ *ersten Ableitungen willkürliche Werte anzunehmen fähig ist.*

Diese willkürlich zu bestimmenden $n$ Werte nennt man auch die *Anfangswerte des Integrals.* Legt man den Anfangswerten in (2) spezielle Werte bei, so erhält man aus dem allgemeinen ein partikuläres Integral. Hier gilt der Satz:

*Bildet man aus dem allgemeinen Integral* $\eta$ *durch* $n$*-malige verschiedene Wahl der Anfangswerte* $n$ *partikuläre Integrale*

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n,$$

1) S. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 3.

*so bilden diese dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn die Determinante der $n^2$ Anfangswerte von Null verschieden ist.* Denn diese Determinante ist ja die Determinante der $n$ Functionen $\eta_1\, \eta_2 \dots \eta_n$ für $x = 0$, deren nicht identisches Verschwinden sich mit der linearen Unabhängigkeit von $\eta_1\, \eta_2 \dots \eta_n$ deckt.

Als wichtigstes Ergebnis dieses Artikels wiederholen wir:

*Bei einer regulären Stelle der Differentialgleichung verhalten sich die sämtlichen Integrale regulär. Das allgemeine Integral können wir daselbst in Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe aufstellen, deren $n$ erste Coefficienten willkürlich bleiben, während alle folgenden bestimmte lineare homogene Functionen von jenen sind.*

**34. Die sogenannten scheinbar singulären Punkte.** Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Umkehrung des ersten Teiles des soeben ausgesprochenen Satzes nicht erlaubt ist: es ist sehr wohl möglich, dass die sämtlichen Integrale bei einer Stelle $x = 0$ sich regulär verhalten, d. h. gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind, ohne dass $x = 0$ eine reguläre Stelle der Differentialgleichung ist.

Sei nämlich

$$x^{\alpha_1} P_1(x), \quad x^{\alpha_2} P_2(x), \dots, x^{\alpha_n} P_n(x),$$

wo $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n$ positive ganze Zahlen oder Null und $P_1\, P_2 \dots P_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ mit von Null verschiedenem constanten Glied sind, ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0,$$

so verhalten sich alle Integrale der letzteren bei $x = 0$ regulär. Man darf dabei annehmen, dass die sämtlichen Zahlen $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n$ von einander verschieden sind, weil man andernfalls solche lineare homogene Verbindungen der Functionen $x^{\alpha_1} P_1, \dots, x^{\alpha_n} P_n$ an ihre Stelle setzen kann, bei denen jene Forderung erfüllt ist, und die immer noch linear unabhängig sind[1]). Dann ist die Determinante dieses Fundamentalsystems

$$(3)\quad D = \begin{vmatrix} x^{\alpha_1} P_1, & x^{\alpha_2} P_2 & , \dots, & x^{\alpha_n} P_n \\ x^{\alpha_1 - 1} P_{11}, & x^{\alpha_2 - 1} P_{21} & , \dots, & x^{\alpha_n - 1} P_{n1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x^{\alpha_1 - n + 1} P_{1, n-1}, & x^{\alpha_2 - n + 1} P_{2, n-1}, & \dots, & x^{\alpha_n - n + 1} P_{n, n-1} \end{vmatrix},$$

wo die neueingeführten $P$ wieder gewöhnliche Potenzreihen sind. Also ist

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 4.

(4) $$D = x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \Delta,$$

wo $\Delta$ für $x = 0$ *weder unendlich wird, noch verschwindet.* Ersteres folgt daraus, dass alle Elemente von $\Delta$ gewöhnliche Potenzreihen sind, Letzteres daraus, dass für $x = 0$ $\Delta$ in die Form

$$\Delta_{(x=0)} \equiv P_1(0) \cdot P_2(0) \ldots P_n(0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \alpha_n \\ \alpha_1(\alpha_1-1) & \alpha_2(\alpha_2-1) & \ldots \alpha_n(\alpha_n-1) \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \end{vmatrix}$$

zu setzen ist. Denn $P_1(0), \ldots, P_n(0)$ sind nach Voraussetzung $\neq 0$ und ebenso die Determinante rechts, da diese leicht umzuformen ist in

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = (\alpha_2-\alpha_1)\ldots(\alpha_n-\alpha_1)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})\text{ [1]}$$

und alle $\alpha$ von einander verschieden sind.

Nach Gleichung (4) verschwindet also $D$ für $x = 0$ dann und nur dann, wenn $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n > \frac{n(n-1)}{2}$, d. h. wenn mindestens eine der Zahlen $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n > n-1$ ist. Da aber nach Artikel 28

(5) $$D = C \cdot e^{-\int p_1\, dx},$$

wo $C \neq 0$, so ist $x = 0$ *singuläre* Stelle der Differentialgleichung, sobald $D$ für $x = 0$ verschwindet. Wenn dagegen $D$ für $x = 0$ nicht verschwindet, so sind nach den Formeln (4) Art. 26 alle Coefficienten der Differentialgleichung für $x = 0$ endlich, da ja die Determinanten $D_1\, D_2 \ldots D_n$ nur positive Potenzen von $x$ enthalten, also für $x = 0$ nicht unendlich werden. $x = 0$ ist dann also *reguläre* Stelle.

Wir haben daher das Resultat:

*Dann*[2] *und nur dann, wenn ein bei $x = 0$ reguläres Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung derart*

1) Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. § 10. 1. S. 85.

2) Den durch das Einleitungswort „dann" charakterisierten Teil des obigen Satzes verdankt der Verf. einer privaten Mitteilung von Herrn Koehler in Heidelberg. Vgl. auch Fabry, Sur les intégrales des équations différentielles etc., Thèse, Paris, 1885.

*beschaffen ist oder umgeformt werden kann, dass die einzelnen Elemente bezw. zu den Exponenten*

$$0, 1, 2, \ldots n-1$$

*gehören, ist $x = 0$ reguläre Stelle der Differentialgleichung.*

Wir wollen deshalb eine Stelle, bei welcher die Coefficienten zwar zum Teil unendlich werden, die sämtlichen Integrale aber sich trotz dem regulär verhalten, eine *scheinbar singuläre Stelle der Differentialgleichung* nennen und im Gegensatz dazu, wenn es darauf ankommt, die Unterscheidung zu betonen, von *wirklich singulären* Stellen sprechen.

Gleichzeitig haben wir nach der obigen Ableitung das Resultat: *Bei einer scheinbar singulären Stelle verschwindet die Determinante des Fundamentalsystems.*

Umgekehrt kann man sofort die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angeben, dass eine singuläre Stelle der Differentialgleichung eine solche scheinbar singuläre Stelle ist.[1]):

1) *die $n$ Wurzeln der zu der betreffenden Stelle gehörigen determinierenden Gleichung müssen $n$ von einander verschiedene positive ganze Zahen sein, worunter sich auch die Null befinden kann und von denen mindestens eine $\geqq n$ 1 sein muss.*
2) *Bei jeder von diesen Wurzeln müssen die Bedingungen des Artikel* (14) *erfüllt sein, dass zu ihr eine Reihe gehört.*

**35. Die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.** Von dem Inhalt des Artikel 33 können wir Anwendung machen auf die wichtige Klasse der linearen homogenen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten

$$P(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{6}$$

wo $a_1\, a_2 \ldots a_n$ Constanten sind. Für diese Gleichung ist jeder endliche Wert von $x$ regulär und seine Umgebung die ganze $x$-Ebene. Wir wollen daher für $x = 0$ ein Fundamentalsystem von Integralen aufstellen.

Um zunächst ein partikuläres Integral zu erhalten, wählen wir in dem allgemeinen Integral

$$\eta = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^k$$

die $n$ Anfangswerte bezw.

$$= 1, r, r^2, \ldots, r^{n-1},$$

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. 68. (1868) S. 381, wo die scheinbar singulären Stellen „ausserwesentlich singulär“ genannt werden.

wo $r$ eine noch zu bestimmende Grösse ist, also

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_0' = r, \quad \eta_0'' = r^2, \ldots, \eta_0^{(n-1)} = r^{n-1}.$$

Damit nun auch die $n^{\text{te}}$ Ableitung von $\eta$ für $x = 0$ sich dieser Form anpasst, also gleich der $n^{\text{ten}}$ Potenz von $r$ wird, muss $r$ der Gleichung genügen

(7) $$\varphi(r) \equiv r^n + a_1 r^{n-1} + a_2^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

und umgekehrt, wenn $r$ eine Wurzel der Gleichung (7) ist, so ist $\eta_0^{(n)} = r^n$ und sogar ganz allgemein

(8) $$\eta_0^{(\lambda)} = r^\lambda \quad (\lambda = n, n+1, \ldots).$$

Ist nämlich schon bis zu irgend einem Wert von $\lambda$ diese Behauptung erfüllt — und sie ist es ja bis $\lambda = n$ — so gilt sie auch für den nächst grösseren Wert von $\lambda$. Dies zu beweisen, differenzieren wir die Identität

$$\eta^{(n)} + a_1 \eta^{(n-1)} + \cdots + a_n \eta = 0$$

$(\lambda - n)$-mal nach $x$

$$\eta^{(\lambda)} + a_1 \eta^{(\lambda-1)} + \cdots + a_n \eta^{(\lambda-n)} = 0,$$

woraus folgt

(9) $$\eta^{(\lambda)} = -[a_1 \eta^{(\lambda-1)} + \cdots + a_n \eta^{(\lambda-n)}].$$

Gilt nun (8) schon bis $\lambda - 1$, so folgt aus (9)

$$\eta^{(\lambda)} = -r^{\lambda-n}[a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_n]$$

oder

$$\eta^{(\lambda)} = -r^{\lambda-n}[\varphi(r) - r^n] = r^\lambda,$$

da $r$ ja eine Wurzel der Gleichung (7) ist.

Hiermit ist die Gültigkeit der Gleichung (8) allgemein dargethan, und wir haben das partikuläre Integral

$$\eta = 1 + \frac{r}{1} x + \frac{r^2}{2!} x^2 + \frac{r^3}{3!} x^3 + \cdots,$$

wenn $r$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi(r) = 0$ ist, die man wegen dieser Bedeutung die *charakteristische Gleichung der Differentialgleichung* (6) nennt. Sie wird aus der Differentialgleichung gebildet, indem man einfach jede Ableitung von $y$ durch die Potenz von $r$ ersetzt, deren Exponent gleich der Ordnung der Ableitung ist.

Die für $\eta$ ermittelte Reihe stellt nun bekanntlich die *Exponentialfunction*

$$e^{rx}$$

dar. Wir können uns aber auch auf den Standpunkt stellen, dass wir diese Function noch gar nicht kennen und die durch die Reihe definierte Function von $rx$ nur mit dem *Zeichen* $e^{rx}$ belegen. Alsdann lehrt uns die Theorie der linearen Differentialgleichungen die

wichtige Eigenschaft dieser Function, dass jene Darstellung für die ganze $x$-Ebene gilt, weil ja die Umgebung der Stelle $x=0$ der Differentialgleichung die ganze $x$-Ebene bedeckt. Wir erfahren also lediglich aus der Differentialgleichung selbst, dass

$$e^{rx} \equiv 1 + \frac{rx}{1} + \frac{(rx)^2}{2!} + \cdots,$$

wie man auch sagt, eine *beständig convergente Potenzreihe* ist.

Hat nun die charakteristische Gleichung (7) $n$ verschiedene Wurzeln $r_1 r_2 \ldots r_n$, so erhalten wir auf diese Art $n$ partikuläre Integrale

$$(10) \qquad e^{r_1 x},\ e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x},$$

deren lineare Unabhängigkeit im nächsten Artikel bewiesen wird.

Hat dagegen die charakteristische Gleichung weniger als $n$ verschiedene Wurzeln, so erhält man zunächst weniger als $n$ partikuläre Integrale. Ist aber dann z. B. $r_1$ eine $\gamma$-fache Wurzel, so ist

$$(11) \qquad \varphi(r_1) \equiv 0, \quad \varphi'(r_1) \equiv 0, \ldots, \varphi^{(\gamma-1)}(r_1) \equiv 0.$$

Setzt man nun, um weitere Integrale zu finden, unter Anwendung der im Artikel 30 vorgeführten Fuchs'schen Methode

$$(12) \qquad y = e^{r_1 x} \int z\, dx,$$

so erhält man für $z$ die Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(13) \quad \begin{aligned} &z^{(n-1)} + z^{(n-2)}[n r_1 + a_1] \\ &+ z^{(n-3)}\left[\binom{n}{2} r_1^2 + \binom{n-1}{1} a_1 r_1 + a_2\right] \\ &+ z^{(n-4)}\left[\binom{n}{3} r_1^3 + \binom{n-1}{2} a_1 r_1^2 + \binom{n-2}{1} a_2 r_1 + a_3\right] \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ z[n r_1^{n-1} + (n-1) a_1 r_1^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} r_1 + a_{n-1}] = 0, \end{aligned}$$

welche wieder constante Coefficienten hat und zwar als Coefficient von $z, z', z'', \ldots, z^{(n-2)}$ bezw.

$$\varphi'(r_1), \quad \frac{\varphi''(r_1)}{2!}, \quad \frac{\varphi'''(r_1)}{3!}, \ldots, \frac{\varphi^{(n-1)}(r_1)}{n-1!}.$$

Mit Rücksicht auf die Identitäten (11) lautet also (13)

$$(13^a) \qquad z^{(n-1)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(r_1)}{(n-1)!} z^{(n-2)} + \ldots + \frac{\varphi^{(\gamma)}(r_1)}{\gamma!} z^{(\gamma-1)} = 0.$$

Diese Gleichung wird aber erfüllt, wenn man

$$z = A_0 + A_1 x + \cdots + A_{\gamma-2} x^{\gamma-2}$$

setzt, wo $A_0, A_1, \ldots, A_{\gamma-2}$ völlig willkürliche Constanten sind. Also liefert (12) für Gleichung (6) das Integral

$$y = e^{r_1 x}[B_0 + B_1 x + \cdots + B_{\gamma-1} x^{\gamma-1}]$$

wo die $B$ willkürliche Constanten sind, oder also die $\gamma$ Integrale

(14) $$e^{r_1 x},\quad x e^{r_1 x}, \ldots, x^{\gamma-1} e^{r_1 x}.$$

Auf diese Weise gelangt man bei einer $\gamma$-fachen Wurzel der charakteristischen Gleichung zu $\gamma$ Integralen der Differentialgleichung (6), also im Ganzen stets zu $n$ Integralen.

**36. Nachweis der linearen Unabhängigkeit der $n$ aufgestellten Integrale der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten.** Um zu beweisen, dass die ermittelten $n$ Integrale der Differentialgleichung (6) in jedem Falle ein Fundamentalsystem bilden, brauchen wir nach Artikel 33 nur zu zeigen, dass die Determinante der $n^2$ Anfangswerte von Null verschieden ist. Diese Determinante lautet aber, wenn wir gleich den allgemeinen Fall, dass mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorhanden sind, in's Auge fassen,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \ldots & r_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2r_1 & \ldots & (n-1)r_1^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & (n-1)(n-2)r_1^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \ldots & r_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}.$$

Sie ist so gebildet, dass einer $\gamma$-fachen Wurzel $\gamma$ Zeilen entsprechen, deren erste die $0^{\text{te}}, 1^{\text{te}}, \ldots, (n-1)^{\text{te}}$ Potenz dieser Wurzel als Elemente enthält, während jede folgende der $\gamma$ Zeilen aus den Ableitungen der Elemente der vorhergehenden nach der betreffenden Wurzel besteht. Das Verschwinden der Determinante $D$ hätte nun zur Folge[1]), dass die Elemente jeder Zeile ein und derselben linearen homogenen Relation genügten, deren Coefficienten nicht sämtlich Null wären. Bezeichnet man diese Coefficienten mit $K_0\, K_1 \ldots K_{n-1}$ und setzt

$$K_0 + K_1 r + \cdots + K_{n-1} r^{n-1} = g(r),$$

so zieht also das Verschwinden von $D$ die Identitäten nach sich

$$\begin{array}{l} g(r_1) = 0,\quad g'(r_1) = 0, \ldots g^{(\gamma-1)}(r_1) = 0 \\ g(r_2) = 0,\quad g'(r_2) = 0, \ldots \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \end{array},$$

d. h. die ganze Function höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $r$ $g(r)$ müsste durch jeden der Linearfaktoren der ganzen Function $n^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(r)$ und zwar durch jeden ebenso oft als jene teilbar sein. Dieser

1) S. Anhang!

Widerspruch löst sich nur dadurch, dass alle $K_0, K_1 \dots K_{n-1}$ identisch Null sein müssen oder $D \neq 0$ ist.

Hiermit ist erwiesen, dass die $n$ Integrale der Gleichung (6), die wir im vorigen Artikel ermittelt haben, ein Fundamentalsystem bilden.

Die in den beiden letzten Artikeln entwickelte Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten führt also zu folgendem Ergebnis:

*Wenn*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

*eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten ist, so bildet man die zugehörige charakteristische Gleichung*

$$\varphi(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

*Jeder $\gamma$-fachen Wurzel derselben $r_1$ entsprechen die $\gamma$ Integrale*

$$e^{r_1 x},\quad x e^{r_1 x}, \dots, x^{\gamma-1} e^{r_1 x}$$

*der Differentialgleichung. Die $n$ so resultierenden Integrale bilden ein Fundamentalsystem.*

**37. Beispiele.** Zwei ganz einfache Beispiele mögen noch der allgemeinen Untersuchung folgen.

*1. Beispiel:*

$$y'' + y = 0 \tag{15}$$

ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$r^2 + 1 = 0$$

und hat die Wurzeln $+i$, $-i$, wenn $i = \sqrt{-1}$. Wir haben daher das Fundamentalsystem

$$e^{xi},\quad e^{-xi}.$$

Da auch jede lineare homogene Verbindung der Elemente desselben mit constanten Coefficienten ein Integral ist, so müssen auch

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

der Differentialgleichung (15) genügen, wovon man sich in der That leicht überzeugt.

$\cos x$ und $\sin x$ sind aber wieder ein Fundamentalsystem; denn ihre Determinante ist

$$\begin{vmatrix} \cos x, & \sin x \\ -\sin x, & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Will man umgekehrt die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung bilden, von der $\cos x$, $\sin x$ ein Fundamentalsystem sind, so lautet dieselbe nach Artikel 26.

$$\begin{vmatrix} y\,, & y'\,, & y'' \\ \cos x, & -\sin x, & -\cos x \\ \sin x, & \cos x, & -\sin x \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$y + y'' = 0,$$

sodass man, wie es der Fall sein musste, wiederum Gleichung (15) erhält.

*2. Beispiel:*

$$y''' - y'' - y' + y = 0. \tag{16}$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$r^3 - r^2 - r + 1 = (r - 1)^2 (r + 1) = 0$$

und hat die Wurzeln

$$1,\ 1,\ -1.$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (16) lautet also

$$e^x,\quad xe^x,\quad e^{-x}.$$

## Kapitel VI.

### Die Integralfunction im ganzen Gebiet der Differentialgleichung. Gruppe der Differentialgleichung.

**38. Feststellung der zu behandelnden Aufgabe.** Im vorigen Kapitel haben wir das Verhalten der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung

(1) $$P(x, y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

in der Umgebung einer regulären Stelle untersucht und für eine solche ein Fundamentalsystem von Integralen aufgestellt. Bevor wir uns aber nun zu den singulären Stellen wenden, tritt, wie schon in Artikel 32 bemerkt wurde, noch eine andere Aufgabe an uns heran, die in dem gegenwärtigen Kapitel ihre Erledigung finden soll.

Der Bereich, für den bisher die Integrale definiert sind, ist die Umgebung des jeweils in's Auge gefassten regulären Punktes, also bei unsern Formeln die Umgebung des Punktes $x = 0$ oder das Innere eines Kreises, welcher im Allgemeinen nur einen Teil des Gebietes der Differentialgleichung ausmacht. Denn nicht immer wird wie in dem Beispiel der Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten die Umgebung eines beliebigen Punktes bereits das ganze Gebiet der Differentialgleichung bedecken. Während also auf der einen Seite das allgemeine Integral zunächst nur für ein beschränktes Gebiet definiert ist, wissen wir andererseits — weil wir bei jedem beliebigen andern regulären Punkt geradeso wie bei $x = 0$ verfahren können —, dass in dem ganzen regulären Teil des Gebietes der Differentialgleichung das allgemeine Integral wirklich existiert. Es drängt sich daher eine Frage auf, der wir eine doppelte Fassung geben können. Wir wünschen nämlich zu wissen:

1) *Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Fundamentalsystem von regulären Integralen, welches für die reguläre Stelle $x = 0$ und dem, welches für eine beliebige andere reguläre Stelle $x = a$ aufgestellt wird?*

2) *Wie ermittelt man den Wert, den ein zunächst nur für die*

*Umgebung der regulären Stelle $x = 0$ definiertes Integral in einer beliebigen andern regulären Stelle $x = a$ erhält?*

Es ist dies in der That nur eine verschiedene Fassung derselben Frage; denn wir werden sehen, dass mit der einen der beiden Fragen zugleich auch die andere ihre Beantwortung findet. Als Ausgangspunkt der Untersuchung wählen wir die zweite Form der Fragestellung.

**39. Analytische Fortsetzung der Integrale.** Es sei

$$\eta = \mathfrak{P}_0(x\,|\,0) = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^k \tag{2}$$

ein für die Umgebung der regulären Stelle $x = 0$ definiertes Integral mit den Anfangswerten

$$\eta_0 \; \eta_1 \ldots \eta_{n-1}.$$

Den Kreis, welcher die Umgebung von $x = 0$ darstellt, wollen wir mit $K_0$, die Umgebung einer beliebigen andern regulären Stelle $x_i$ mit $K_i$, die zugehörigen Radien mit $R_0$, $R_i$ bezeichnen. Nun fragen wir: welchen Wert nimmt das zunächst nur für $K_0$ definierte Integral $\eta$ n einem ausserhalb $K_0$ gelegenen beliebigen regulären Punkt $x = a$ an?

Zur Beantwortung dieser Frage verbinden wir die beiden Punkte $x = 0$ und $x = a$ durch eine beliebige, sich selbst nicht schneidende Curve $C$ von endlicher Länge, welche in ihrem ganzen Verlauf einen endlichen (nicht unendlich klein werdenden) Abstand von singulären Punkten bewahrt. Dass eine solche Curve sich immer herstellen lässt, folgt aus den Bemerkungen über das Gebiet der Differentialgleichung (Art. 2). Sie wäre nicht herstellbar, wenn das Gebiet der Differentialgleichung aus getrennten Teilen bestände und die Punkte 0 und $a$ in zwei verschiedenen Teilen lägen.

Nun sei $\bar{x}_1$ der erste — falls es deren mehrere giebt — Schnittpunkt von von $K_0$ und $C$ in der Richtung von 0 nach $a$, $x_1$ ein Punkt auf $C$ zwischen 0 und $\bar{x}_1$, der der Bedingung genügt

$$|x_1 - \bar{x}_1| < R_1,$$

wo $R_1$ nach der vorhin eingeführten Bezeichnung der Radius der Umgebung $K_1$ des Punktes $x_1$ ist. Diese Bestimmung eines Punktes $x_1$ ist wiederum stets möglich;

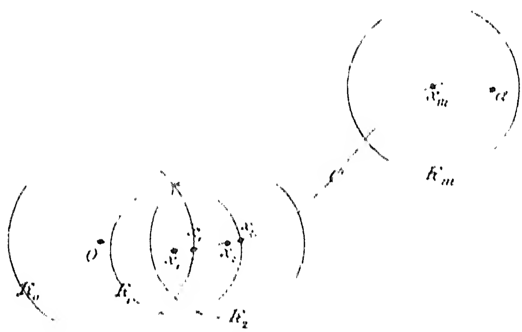

Fig. 1.

denn der Radius der Umgebung eines jeden Punktes auf
Voraussetzung keine unendlich kleine Grösse; also braucht
$x_1$ nur hinreichend nahe an $x_1$ auf $C$ heranzurücken, um di
Ungleichung zu erfüllen. Der Kreis $K_1$ greift dann notw
die Fläche von $K_0$ hinaus.

Ist dann $x_2$ der erste Schnittpunkt des Curvenstück
dem Kreis $K_1$, so kann man abermals einen Punkt $x_2$ auf
$x_1$ und $x_2$ annehmen, sodass

$$|x_2 - x_2| < R_2$$

u. s. w. Man erhält auf diese Art auf $C$ die Folge v
$x_1\, x_2 \ldots$, deren jeder noch innerhalb der Umgebung des
den Punktes liegt, aber von jenem durch ein Stück der $C$
endlicher Länge getrennt ist. Da aber die ganze Curve
liche Länge haben sollte, wird man folglich nach einer en
zahl von Wiederholungen jener Operation zu einem Punkt
gelangen, derart, dass sowohl $a$ wie das Curvenstück von $C$
innerhalb des Kreises $K_m$ liegt.

Jetzt wandeln wir die Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$, welche na
von $x$ fortschreitet, in eine nach Potenzen von $x - x_1$ for
Reihe um. Wir setzen zu dem Zweck

$$x = (x - x_1) + x_1,$$

entwickeln die einzelnen Potenzen von $x$ in $\mathfrak{P}_0(x|0)$ nach
mischen Satz in Potenzen von $x - x_1$, ordnen dann alle
letzteren und erhalten so

$$\mathfrak{P}_0(x|0) = \mathfrak{P}_1(x|x_1) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda (x - x_1)^\lambda.$$

Die letztere Reihe convergiert sicher, solange $x$ innerhalb
um $x_1$ als Mittelpunkt bleibt, der noch ganz innerhalb $K_0$
wahre Convergenzkreis der neuen Reihe ist aber grösse
folgendermassen ermittelt.

$$\eta = \mathfrak{P}_1(x|x_1)$$

ist ein Integral der Differentialgleichung (1) bei der regu
$x = x_1$; denn $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ ist ja nur eine Umformung der Rei
und $x_1$ liegt noch im Convergenzgebiet von $\mathfrak{P}_0(x|0)$. Fo
$\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ in dem allgemeinen, für die Umgebung von $x_1$
den Integral von (1) bei geeigneter Wahl der Anfangswert
sein und der Convergenzkreis von $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ mit demjeni
dachten allgemeinen Integrals, d. h. mit $K_1$, übereinstimm

Wir haben also das zunächst nur für das Innere von $I$

Integral $\eta$ nun auch für $K_1$ definiert, d. h. für das Innere eines Kreises, der über die Fläche von $K_0$ hinausgreift.

Genau so fahren wir nun fort, indem wir die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ in eine innerhalb $K_2$ convergente Reihe

$$\mathfrak{P}_2(x|x_2)$$

umwandeln, welche innerhalb $K_2$ die Function $\eta$ darstellt u. s. w., bis wir zu der innerhalb $K_m$ gültigen Darstellung von $\eta$

$$\eta = \mathfrak{P}_m(x|x_m)$$

gelangen, welche die Berechnung des Wertes von $\eta$ für $x = a$ gestattet. Denn der letztere Punkt liegt ja innerhalb $K_m$.

Das hier angewandte Verfahren nennt man *die analytische oder Kreis-Fortsetzung der Function $\eta$ längs der Curve $C$.* Dasselbe führt zu dem Resultat:

*Wenn man das zunächst nur für das Innere der Umgebung von $x = 0$ definierte Integral $\eta$ längs einer bestimmten Curve $C$ nach einer beliebigen andern regulären Stelle $x = a$ hin fortsetzt, so erhält man einen bestimmten Wert des Integrals $\eta$ für $x = a$.*

**40. Das monogene Gebilde der Integralfunction.** Mit dem vorstehenden Satze ist das Integral $\eta$ thatsächlich für das ganze Gebiet der Differentialgleichung mit Ausnahme der singulären Stellen definiert. Denn aus der einen Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$ entspringen vermöge der Fortsetzung unzählig viele andere, welche die Function $\eta$ in der Umgebung eines jeden regulären Wertes von $x$ darstellen. Die Gesamtheit dieser Darstellungsformen oder Potenzreihen, welche alle aus einer einzigen von ihnen in der angegebenen Art abzuleiten sind, nennt man aber nach Weierstrass das *monogene Gebilde der Function $\eta$*, während die einzelnen Potenzreihen, welche die Function $\eta$ in der Umgebung der einzelnen Werte von $x$ darstellen, *die Elemente dieser Function* und, wenn es sich wie in unserm Fall um reguläre Stellen handelt, speziell *die regulären Elemente derselben* heissen.

Verstehen wir unter

$$\eta = \mathfrak{P}_0(x|0)$$

nunmehr das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1), bei welchem also die $n$ ersten Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$ noch willkürlich sind, so führt das auf dieses Integral angewandte Fortsetzungsverfahren zu dem *Begriff des monogenen Gebildes der allgemeinen Integralfunction.*

Wir sehen jetzt, dass wir *nicht* zu *einem* solchen monogenen Functionsgebilde gelangt wären, wenn wir zugelassen hätten, dass das Gebiet der Differentialgleichung aus mehreren unter einander nicht

zusammenhängenden Bereichen $G_1$, $G_2$, ... bestehen kann. Denn in diesem Fall hätte man ja die für die Umgebung eines Punktes in $G_1$ z. B. definierten Integrale nicht nach den Punkten der andern Gebiete hin fortsetzen können. Man hätte also in *jedem* der Gebiete ein Functionselement aufstellen müssen, um daraus für dieses Gebiet ein monogenes Functionsgebilde abzuleiten. Man gelangte also dann zu dem gleichen Resultat, als wenn man die Differentialgleichung (1) einmal unter dem Gesichtspunkt behandelt, die Coefficienten wären *nur für* $G_1$, ein anderes Mal, sie wären *nur für* $G_2$ u. s. w. definiert. Hiermit ist die in Artikel 2 aufgestellte Behauptung erwiesen.

**41. Gebiet der Eindeutigkeit der Integralfunction.** Nachdem wir nunmehr den Begriff der für das ganze Gebiet der Differentialgleichung — mit Ausnahme der singulären Stellen — definierten Integralfunction gewonnen haben, können wir die noch zu erledigenden Aufgaben auch *die Untersuchung der Integralfunction im ganzen Gebiet der Differentialgleichung* nennen. Bei einer solchen functionentheoretischen Untersuchung ist aber die erste Frage die nach der *Eindeutigkeit der Function.* Wir wollen daher jetzt ermitteln, *in welchem Gebiete sich die Integralfunction eindeutig verhält.*

Das partikuläre Integral $\eta$, welches durch Gleichung (2) gegeben war, erhielt nach Artikel 39 in einem beliebigen regulären Punkt $x = a$ einen bestimmten Wert, wenn man auf einem bestimmten Wege $C$ von 0 nach $a$ fortschritt. Wir verbinden nun die beiden Punkte 0 und $a$ durch eine zweite Curve $C'$, welche folgenden Bedingungen genügt: sie geht der Reihe nach durch die Punkte $x_1'$ $x_2'$ $x_3'$ ... $x_m'$, von denen $x_1'$ gleichzeitig innerhalb $K_0$ und $K_1$, $x_2'$ gleichzeitig innerhalb $K_1$ und $K_2$, u. s. w., endlich $x_m'$ gleichzeitig innerhalb $K_{m-1}$ und $K_m$ liegt, und dabei verläuft das Stück der Curve $C'$ von $x_0$ bis $x_1'$ ganz innerhalb $K_0$, das von $x_1'$ bis $x_2'$ ganz innerhalb $K_1$, u. s. w., endlich das Stück der Curve $C'$ von $x_m'$ bis $a$ ganz innerhalb $K_m$. Beide Curven besitzen während ihres Verlaufs einen Abstand von einander der — abgesehen von den Endpunkten — nirgends unendlich klein wird.

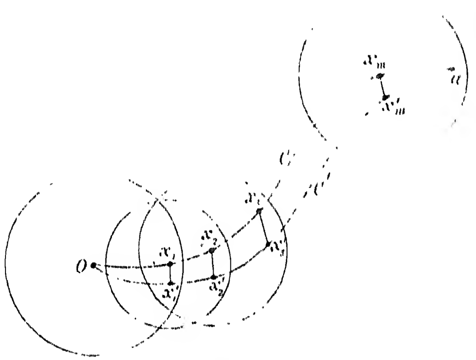

Fig. 2.

Benutzen wir nun die Curve $C'$ gerade wie vorher $C$, um das Integral $\eta$ von $x=0$ nach $x=a$ fortzusetzen, so gelangen wir in $x=a$ zu demselben Wert wie vorher. Hiervon überzeugen wir uns schrittweise, indem wir die Curve $C$ in die einzelnen Stücke

$$0x_1,\quad x_1x_2,\quad x_2x_3,\ldots,\ x_m a,$$

die Curve $C'$ in die entsprechenden Stücke

$$0x_1',\quad x_1'x_2',\quad x_2'x_3',\ldots,\ x_m' a$$

zerlegen und jedesmal die Punkte

$$x_1 \text{ und } x_1',\quad x_2 \text{ und } x_2',\ldots,\ x_m \text{ und } x_m'$$

geradlinig mit einander verbinden. Berechnet man nun den Wert des durch seine Anfangswerte für $x=0$ definierten Integrals $\eta$ für $x=x_1$, indem man sich entweder denkt, dass man direkt auf der Curve $C$ dahin geht oder auf $C'$ erst nach $x_1'$ und dann geradlinig von $x_1'$ nach $x_1$, so ist das Resultat dasselbe, weil man sich nur innerhalb des Kreises $K_0$ bewegt hat, in welchem man die Function $\eta$ durch ein und dieselbe Potenzreihe ($\mathfrak{P}_0(x|0)$) darstellen kann. Berechnet man dann den Wert der jetzt innerhalb $K_1$ durch die Gleichung

$$\eta = \mathfrak{P}_1(x|x_1)$$

darstellbaren Function $\eta$ in $x_2$, indem man entweder auf $C$ direkt von $x_1$ nach $x_2$ übergeht, oder von $x_1$ nach $x_1'$ (wobei jetzt in $x_1'$ $\eta$ denselben Wert erhält, den es vorher in diesem Punkte hatte), von $x_1'$ auf $C'$ nach $x_2'$, von $x_2'$ geradlinig nach $x_2$, so ist das Resultat wieder das gleiche, weil man beide Male innerhalb $K_1$ geblieben, worin $\eta$ durch eine gewöhnliche Potenzreihe darstellbar, also eindeutig ist. Fasst man nun die beiden, nacheinander ausgeführten Schritte zusammen, so kann man den Weg $x_1'x_1$ und den entgegengesetzten $x_1x_1'$ einfach weglassen, weil man in $x_1'$, wie oben schon bemerkt wurde, wieder zu demselben Wert von $\eta$ zurückkehrt, mit dem man das erste Mal ausging. Hiernach führen die beiden Wege von $0$ nach $x_2$, wenn man einmal direkt auf $C$ geht, ein zweites Mal erst auf $C'$ nach $x_2'$ dann geradlinig von $x_2'$ nach $x_2$, in $x_2$ zu demselben Wert von $\eta$.

Genau so weiterschliessend erkennt man, dass die Fortsetzung des Integrals $\eta$ von $0$ nach $a$ auf $C$ und $C'$ zu demselben Wert führt.

Nun kann man $C'$ so behandeln wie vorher $C$, also auf $C'$ eine Reihe von Punkten annehmen und eine Curve $C''$ so legen, dass sie successive in deren Umgebungen verläuft, u. s. w. Man kann die Wegcurve zwischen $0$ und $a$ in dieser Weise allmählig immer weiter und weiter variieren und schliesslich in eine beliebige andere Lage überführen, falls nur zwischen dieser und der ursprünglichen Lage der

Curve keine singulären Punkte eingeschlossen sind. Denn, wenn man sich bei der Verschiebung der Curve zwischen $0$ und $a$ aus der Lage $C$ in die Lagen $C'$, $C''$, ... einer singulären Stelle nähert, so werden in ihrer Nähe die Convergenzkreise der Punkte auf der Wegcurve immer kleiner und kleiner, schliesslich unendlich klein, sodass man zuletzt den für die Curve geforderten Eigenschaften nicht mehr genügen kann. Liegt dagegen zwischen irgend zwei die Punkte $0$ und $a$ verbindenden Curven $C$ und $C_1$ kein singulärer Punkt, so kann man in der angegebenen Weise stets von der einen successive zu der andern übergehen. Zwei solche Wege führen also stets zu demselben Wert des Integrals.

Wie man sich nun z. B. bei den Functionen $\sqrt{x}$ und $\log x$, welche nicht in der ganzen $x$-Ebene $E$ eindeutig sind, ein Gebiet der Eindeutigkeit $E'$ dadurch herstellen kann, dass man einen als unüberschreitbar geltenden *Verzweigungsschnitt* von $0$ bis in's Unendliche legt, ähnlich hier. Das Gebiet der Differentialgleichung besteht aus der Gesamtheit der regulären und ausserwesentlich singulären Punkte der Differentialgleichung und bildet einen zusammenhängenden Bereich $G$. Dieser entsteht aus der ganzen unendlichen $x$-Ebene, indem sämtliche wesentlich singuläre Stellen aus derselben ausgeschnitten werden, sei es dass dies isolierte Punkte sind, oder dass sie ganze Curven oder Flächenstücke anfüllen. Sticht man in gleicher Weise aus $G$ auch noch die sämtlichen ausserwesentlich singulären Stellen aus (etwa durch unendlich kleine diese Punkte umgebende Conturen) und alle unendlich grossen Werte von $x$ (etwa durch einen Kreis um einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt mit beliebig grossem Radius), so kann man den übrig bleibenden Bereich, der nur von regulären Punkten erfüllt ist, *den regulären Teil des Gebietes der Differentialgleichung* nennen. Die Begrenzung dieses zusammenhängenden Bereichs besteht nach Vorstehendem aus einer Anzahl geschlossener Curven. Werden diese etwa durch $C_1\ C_2 \ldots C_\lambda$ bezeichnet und verbindet man $C_1$ mit $C_2$, $C_2$ mit $C_3$, u. s. w., $C_{\lambda-1}$ mit $C_\lambda$ durch einander und sich selbst nicht schneidende Schnittlinien, sogenannte *Verzweigungsschnitte*, so erhält man ein ebenes zusammenhängendes Gebiet $G'$, welches nur von einer einzigen geschlossenen Curve begrenzt wird und — in der Sprache der *Analysis Situs* — ein *einfach zusammenhängendes Gebiet* heisst. Beschränken wir die unabhängige Variabe $x$ auf ein solches Gebiet $G'$, so ist es offenbar *gar nicht möglich*, dass zwei Wege von $x$, welche dieselben Punkte mit einander verbinden, singuläre Punkte zwischen sich einschliessen. Je zwei solche Wege müssen daher notwendig zu demselben Endwert des Integrals führen, und wir können nunmehr das Resultat des gegenwärtigen Artikels folgendermassen aussprechen:

*Die Integralfunction $\eta$ der Differentialgleichung* (1) *ist eindeutig in jedem einfach zusammenhängenden, von singulären Punkten freien Gebiet, das man aus dem Gebiet der Differentialgleichung herstellen kann.*

**42. Zweige der Integralfunction.** Beschränkt man die unabhängige Variable $x$ auf ein solches Gebiet $G'$, so erhält man durch Fortsetzung des Integrals

$$\eta = \mathfrak{P}_0(x|0)$$

über dieses ganze Gebiet einen *eindeutigen Zweig der Integralfunction*, d. h. wenn in der Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$ die willkürlichen Constanten einmal in irgend einer Weise festgelegt sind, liefert die gedachte Fortsetzung der Function $\eta$ in jedem beliebigen Punkte von $G'$ einen und nur einen bestimmten Wert derselben. Ueberschreitet man dagegen bei der Fortsetzung von $\eta$ einen oder mehrere der Verzweigungsschnitte und sieht diese Linien darauf wieder als unüberschreitbar an, so hat man abermals einen in $G'$ eindeutigen Zweig der Integralfunction, der aber im Allgemeinen von dem zuerst betrachteten verschieden ist, d. h. in jedem Punkte von $G'$ einen andern Wert annimmt als jener. Der erste Zweig ging also beim Ueberschreiten jener Linie in den zweiten über, und daher rechtfertigt sich der Name *Verzweigungsschnitt* für die gedachten Linien.

Im Allgemeinen kommt man so zu immer neuen, also zu unendlich vielen Zweigen der Integralfunction.

Das Beispiel der Gauss'schen Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0 \tag{3}$$

möge diese Begriffe noch näher veranschaulichen. Das Gebiet dieser Differentialgleichung ist die gesamte $x$-Ebene; die einzigen singulären Punkte im Endlichen sind $x = 0$ und $x = 1$. Benutzt man also z. B. den positiven Teil der reellen Axe in der $x$-Ebene als Verzweigungsschnitt, so entsteht nach dieser Festsetzung ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G'$, welches nur reguläre Werte enthält, d. h. ein Gebiet, in welchem man nicht zwei Punkte durch zwei solche Curven mit einander verbinden kann, dass zwischen beiden ein singulärer Punkt liegt.

Definiert man nun ein Integral $\eta$ der Differentialgleichung (3) durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - x_0$ in der Umgebung der beliebigen, nicht gerade auf dem Verzweigungsschnitt liegenden regulären Stelle $x_0$, mit den Anfangswerten $\eta_0$, $\eta_1$, so erhält dieses Integral bei Fortsetzung über das ganze Gebiet $G'$, wenn man nur den Verzweigungsschnitt als unüberschreitbar gelten lässt, in jedem Punkte einen ganz bestimmten Wert, auf welchem Wege man auch dahin gelangt. Insbesondere kehrt man daher in $x_0$ immer wieder zu

dem Werte $\eta_0$ des Integrals zurück. Man hat so einen innerhalb $G'$ eindeutigen Zweig des Integrals $\eta$. Ueberschreitet man dagegen nun den Verzweigungsschnitt einmal, um ihn darauf wieder zu respectieren, so wird man im Allgemeinen zu andern Werten als vorher in den einzelnen Punkten gelangen. Betrachtet man nämlich zwei Wege von $x_0$ nach einer andern regulären Stelle $a$ innerhalb $G'$, deren einer innerhalb $G'$ verläuft, während der zweite den Verzweigungsschnitt überschreitet, so liegt ja zwischen beiden Wegen mindestens einer der beiden singulären Punkte 0, 1. Man erhält also nach der Ueberschreitung im Allgemeinen einen neuen eindeutigen Zweig u. s. w.

**43. Zusammenhang zwischen zwei unabhängig von einander definierten Fundamentalsystemen.** Wir wollen noch zeigen, dass durch die in diesem Kapitel dargestellte analytische Fortsetzung der Integrale gleichzeitig die unter 1) im Artikel 38 gestellte Frage ihre Beantwortung findet, d. h. die Frage: welcher Zusammenhang besteht zwischen den ganz unabhängig von einander definierten Fundamentalsystemen in der Umgebung zweier regulären Stellen $x = 0$ und $x = a$?

Bezeichnet man diese beiden zunächst durch Functionselemente in den Umgebungen $K_0$ und $K_a$ definierten Fundamentalsysteme von Integralen bezw. mit

$$y_{01},\ y_{02},\ \ldots,\ y_{0n}, \tag{4}$$

$$y_{a1},\ y_{a2}\ \ldots,\ y_{an}, \tag{5}$$

so bestehen nach dem Begriff eines Fundamentalsystems die Relationen

$$\begin{cases} y_{01} = A_{11}y_{a1} + \cdots + A_{1n}y_{an} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_{0n} = A_{n1}y_{a1} + \cdots + A_{nn}y_{an}, \end{cases} \tag{6}$$

wo die $A_{ik}$ von $x$ unabhängige Grössen sind, um deren Berechnung es sich handelt. Da aber die Functionsausdrücke auf der linken Seite der Gleichungen (6) nur im Innern von $K_0$, die auf der rechten Seite nur im Innern von $K_a$ Geltung haben und diese beiden Umgebungen im Allgemeinen von einander ganz getrennte Flächenstücke sind, so kann die Berechnung der $A_{ik}$ gar nicht anders vollzogen werden als dadurch, dass man die Functionen $y_{01}\ y_{02} \ldots y_{0n}$ zuerst längs einer Curve $C$ mit Hülfe von Zwischenwerten $x_1\ x_2 \ldots x_m$ bis in das Innere von $K_a$ hinein fortsetzt, um sie dann durch $y_{a1} \ldots y_{an}$ auszudrücken. Man kommt also bei der gegenwärtigen Fassung des Problems notwendig auf die Methode der successiven Fortsetzung zurück und erkennt so, dass die Werte der Coefficienten $A_{ik}$ und damit die

Relationen (6) selbst in demselben Sinne wie vorher der Endwert des von $x=0$ nach $x=a$ fortgesetzten Integrals $\eta$ von der zu diesem Uebergang benutzten Folge von Zwischenwerten abhängig sind.

Um nun zu einem expliciten Ausdruck für die Coefficienten $A_{ik}$ zu gelangen, drücken wir bei jedem Schritt der Fortsetzung das fortgesetzte Functionensystem $y_{01}\ldots y_{0n}$ durch ein in der Umgebung der betreffenden Stelle, bei der wir uns gerade befinden, gültiges Fundamentalsystem aus. Zu dem Ende bezeichnen wir ein in der Umgebung von $x_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$ gültiges Fundamentalsystem mit

$$y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{in} \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

und denken uns die Anfangswerte jedes dieser wie des Fundamentalsystems (5) durch die Tabelle

$$(7)\qquad \begin{cases} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{cases}$$

bestimmt, wo jede Colonne sich auf ein bestimmtes der Integrale, jede Zeile auf die Ableitungen von bestimmter Ordnung bezieht. Ferner seien die Werte von $y_{ik}$ und seiner $n-1$ ersten Ableitungen in dem Punkte $x_{i+1}$ $(x_{m+1}=a)$

$$(8)\qquad \eta_{k0}^{(i)},\ \eta_{k1}^{(i)},\ \ldots,\ \eta_{k,n-1}^{(i)}\ .$$

Die Werte des Fundamentalsystems $y_{i1}\,y_{i2}\ldots y_{in}$ und der $n-1$ ersten Ableitungen seiner Elemente in $x_{i+1}$ bilden daher das quadratische System von Grössen

$$\eta_{k\lambda}^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\ldots,n \\ \lambda=0,1,\ldots,n-1 \end{pmatrix},$$

welches wir kurz durch $S_i$ repräsentieren wollen, während

$$(9)\qquad |S_i| = |\eta_{k\lambda}^{(i)}| \qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\ldots,n \\ \lambda=0,1,\ldots,n-1 \end{pmatrix}$$

die Determinante dieses quadratischen Systems bedeute, die also als Determinante eines Fundamentalsystems für einen regulären Wert $\neq 0$ ist.

Um nun die Coefficienten der Relation

$$(10)\qquad y_{ik} = a_{k1}^{(i)}\,y_{i+1,1} + \cdots + a_{kn}^{(i)}\,y_{i+1,n}$$

zu ermitteln, brauchen wir nur zu (10) noch die durch ein-, zwei-... $(n-1)$-malige Differentiation nach $x$ daraus entstehenden Gleichungen hinzuzufügen und jedesmal $x=x_{i+1}$ zu setzen; dann folgt nach (7) und (8)

$$a_{k\lambda}^{(i)} = \eta_{k,\lambda-1}^{(i)} \qquad (k,\lambda=1,2,\ldots,n)\,.$$

Das Fundamentalsystem $y_{i1} \ldots y_{in}$ wird also mittelst des Coefficientensystems $S_i$ durch $y_{i+1,1} \ldots y_{i+1,n}$ ausgedrückt.

Drückt man aber erst $y_{i1} \ldots y_{in}$ mittelst $S_i$ durch $y_{i+1,1} \ldots y_{i+1,n}$ aus, dann $y_{i+1,1} \ldots y_{i+1,n}$ mittelst $S_{i+1}$ durch $y_{i+2,1} \ldots y_{i+2,n}$, so entsteht das Coefficientensystem, welches direkt $y_{i1} \ldots y_{in}$ durch $y_{i+2,1} \ldots y_{i+2,n}$ ausdrückt, durch *Composition* aus $S_i$ und $S_{i+1}$, d. h. ein beliebiger Coefficient dieses gedachten Systems ist die Summe der Produkte der Elemente einer Zeile von $S_i$ in die einer Colonne von $S_{i+1}$. Dieses aus $S_i$ und $S_{i+1}$ componierte System bezeichnen wir durch

$$S_i S_{i+1}.$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnung können wir jetzt den expliciten Wert der Coefficienten $A_{ik}$ in (6) angeben; denn da man zuerst $y_{01} \ldots y_{0n}$ mittelst $S_0$ durch $y_{11} \ldots y_{1n}$, dann $y_{11} \ldots y_{1n}$ mittelst $S_1$ durch $y_{21} \ldots y_{2n}$ u. s. w., endlich $y_{m1} \ldots y_{mn}$ mittelst $S_m$ durch $y_{a1} \ldots y_{an}$ ausdrückt, so hat man $y_{01} \ldots y_{0n}$ mittelst

$$S_0 S_1 \ldots S_m$$

durch $y_{a1} \ldots y_{an}$ ausgedrückt; d. h. die Coefficienten der Relationen (6) werden gegeben durch die Identität der Systeme

$$(A_{ik}) \equiv S_0 S_1 \ldots S_m. \tag{11}$$

Wir haben daher das Resultat:

*Setzt man das für die Umgebung von $x = 0$ definierte Fundamentalsystem $y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}$ über die Zwischenwerte $x_1, x_2 \ldots x_m$ bis in's Innere der Umgebung eines andern regulären Punktes $x = a$ fort, so wird das Coefficientensystem $(A_{ik})$ in den Relationen*

$$y_{0i} = \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} y_{ak} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

*durch Composition der Systeme $S_0, S_1, \ldots, S_m$ erzeugt, wenn $S_i$ $(i=0,1,\ldots,m)$ das Coefficientensystem bedeutet, mittelst dessen das in der Umgebung von $x_i$ gültige Fundamentalsystem durch das in der Umgebung von $x_{i+1}$ gültige ausgedrückt wird.*

Aus vorstehendem Satz ziehen wir noch eine nahe liegende und wichtige Folgerung.

Die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (12) geben das Resultat der Fortsetzung der $n$ Elemente des Fundamentalsystems $y_{01} \ldots y_{0n}$ nach der Umgebung von $a$. Diese $n$ Integrale bilden wieder ein Fundamentalsystem. Bildet man nämlich die Determinante

dieser $n$ Integrale, so wird diese[1]) gleich dem Produkt der Determinante der Coefficienten $A_{ik}$ in die Determinante der $n$ linear unabhängigen Functionen $y_{a1} \ldots y_{an}$, welche letztere $\mid\; 0$ ist. Da aber

$$|A_{ik}| = |S_0| \cdot |S_1| \cdots |S_m| \;{}^{1})$$

und $|S_0|, |S_1|, \ldots, |S_m|$ wieder die Determinanten von Fundamentalsystemen für reguläre Werte sind, so sind auch sie, und folglich ihr Produkt $|A_{ik}| \neq 0$. Dies Ergebnis sprechen wir folgendermassen aus:

*Wenn die $n$ Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen gleichzeitig auf beliebigem Wege fortgesetzt werden, so bilden die resultierenden $n$ Functionen stets wieder ein Fundamentalsystem von Integralen.*

**44. Fundamentalsubstitutionen und Gruppe der Differentialgleichung.** Nach dem Inhalt von Artikel 41 und 42 ist für das Studium der Integrale von besonderer Wichtigkeit das Verhalten eines Fundamentalsystems bei Ausführung eines geschlossenen, d. h. zum Ausgangspunkt zurückkehrenden Weges von $x$ oder — wie wir kurz sagen wollen — eines *Umlaufs*, weil die dabei erzielten Aenderungen die Verzweigung der Integrale liefern.

Macht nun, wenn wir mit $x = 0$ wieder einen regulären Punkt und mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein zu diesem Punkt gehöriges Fundamentalsystem bezeichnen, $x$ einen beliebigen Umlauf von $x = 0$ aus, so erhält man nach der Rückkehr zum Ausgangspunkt $n$ Integrale $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$, welche nach dem vorigen Artikel wieder ein Fundamentalsystem bilden und mit dem ursprünglichen durch ein System von Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = \alpha_{11} y_1 + \cdots + \alpha_{1n} y_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \bar{y}_n = \alpha_{n1} y_1 + \cdots + \alpha_{nn} y_n \end{cases}$$

verknüpft sind. An Stelle der Integrale $y_1 \ldots y_n$ treten also infolge des Umlaufs diese linearen homogenen Functionen derselben; man sagt: *das Fundamentalsystem $y_1 \ldots y_n$ erleidet bei dem Umlauf die lineare Substitution*

$$(14)\qquad S = (\alpha_{ik}).$$

Ist nun der Umlauf derart, dass im Innern der von $x$ beschriebenen geschlossenen Curve kein singulärer Punkt liegt, so ist nach Artikel 41 jedes Integral zu seinem Ausgangswert zurückgekehrt, und die Substitution $S$ ist in diesem Fall die sogenannte *identische Substitution*

1) Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 6. (1. u. 9.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix},$$

die gar keine Aenderung hervorbringt. In andern Fällen wird man dagegen eine von der identischen verschiedene Substitution erhalten.

Abermals mit Hülfe des Umstandes, dass nach Artikel 41 zwei verschiedene Wege zwischen denselben Punkten dann zu demselben Endwert des Integrals führen, wenn zwischen ihnen kein singulärer Punkt liegt, kann jeder beliebige Umlauf durch eine Anzahl von besonders gestalteten Wegen, die wir *Fundamentalschleifen* nennen wollen, ersetzt werden. Unter einer zu einem bestimmten singulären Punkt $x = a$ gehörigen Fundamentalschleife wollen wir nämlich einen Weg verstehen, der von der beliebigen regulären Stelle $x = 0$, ohne sich selbst zu schneiden oder durch einen singulären Wert hindurchzugehen, bis in die Umgebung von $a$ hinein, dann im Kreis um $a$ herum und auf demselben Weg wie vorher nach 0 zurückführt.

Da nun diese Fundamentalschleifen selbst wieder Umläufe sind, entsprechen ihnen bestimmte Substitutionen, welche ein durch seine Anfangswerte für $x = 0$ irgendwie bestimmtes Fundamentalsystem $y_1\, y_2 \ldots y_n$ von Integralen beim Durchlaufen der Fundamentalschleifen erleidet. Die Substitution, welche jenes Fundamentalsystem bei dem Durchlaufen einer bestimmten Fundamentalschleife in einer bestimmten der beiden möglichen Richtungen erleidet, nennt man *die zu der betreffenden singulären Stelle gehörige Fundamentalsubstitution* des Fundamentalsystems $y_1\, y_2 \ldots y_n$. Nach dem Vorstehenden lässt sich also *jede Substitution, die $y_1\, y_2 \ldots y_n$ bei irgend einem Umlauf von $x = 0$ aus erleidet, aus den Fundamentalsubstitutionen zusammensetzen*, wenn dieselben in geeigneter Reihenfolge und jede die geeignete Anzahl Male nach einander angewandt werden.

Kennen wir aber die sämtlichen Substitutionen $S$, die das Fundamentalsystem $y_1\, y_2 \ldots y_n$ bei allen möglichen Umläufen von $x = 0$ aus erleidet, so gilt das Gleiche für ein in der Umgebung der ganz beliebigen regulären Stelle $x = x_0$ irgendwie bestimmtes Fundamentalsystem $u_1\, u_2 \ldots u_n$ und für alle möglichen Umläufe von $x = x_0$ aus. Jeder Umlauf von $x_0$ aus kann nämlich ersetzt werden durch einen beliebigen, aber ein für alle Mal festen Weg von $x_0$ nach 0, durch einen Umlauf von 0 aus und durch denselben Weg wie vorher von 0 nach $x_0$ zurück. Ist nun etwa $T$ die Substitution, mittelst deren sich

die $u_1 \dots u_n$ durch $y_1 \dots y_n$ ausdrücken, wenn man auf dem gedachten Weg von $x_0$ nach $0$ geht, $T^{-1}$ die inverse Substitution, so sind also in

$$TST^{-1}$$

sämtliche Substitutionen enthalten, die das Fundamentalsystem $u_1\, u_2 \dots u_n$ bei allen Umläufen von $x = x_0$ aus erleidet, wenn man für $S$ sämtliche Substitutionen einsetzt, die das Fundamentalsystem $y_1 \dots y_n$ bei allen Umläufen von $x = 0$ aus erleidet. Wir dürfen uns daher auf die Betrachtung der Substitutionen $S$ beschränken.

Die Gesamtheit dieser Substitutionen $S$ geniesst nun eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit, die man als *Gruppeneigenschaft* bezeichnet. Man stellt nämlich ganz allgemein die folgende Definition auf[1]:

„Ein System $\mathfrak{G}$ von Elementen irgend welcher Art $A_1, A_2, A_3, \dots$ heisst eine *Gruppe*, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:

1) Durch irgend eine Vorschrift, welche als Composition oder Multiplication bezeichnet wird, leitet man in eindeutiger Weise aus zwei Elementen ein neues Element *desselben Systems* her, in Zeichen:

$$A_i A_k = A_h$$

2) Es ist stets

$$(A_i A_k) A_h = A_i (A_k A_h) = A_i A_k A_h$$

3) Aus $AA_i = AA_k$ und aus $A_i A = A_k A$ folgt $A_i = A_k$".

Aus der Art, wie man zwei nach einander anzuwendende Substitutionen componirt, folgt, dass die Gesamtheit der Substitutionen $S$ den drei Bedingungen der vorstehenden Definition genügt. Wir nennen deshalb die Gesamtheit der Substitutionen $S$ *die Gruppe der Differentialgleichung*.

Obwohl man nun jede Substitution beliebig oft wiederholen kann, ist es doch möglich, dass man im Ganzen nur eine endliche Anzahl verschiedener Substitutionen erhält. Hätte man z. B. nur einen einzigen singulären Punkt, also nur eine einzige Fundamentalsubstitution $S$, so kann man zwar durch deren beständige Wiederholung formal unendlich viele Substitutionen

$$S,\ SS,\ SSS, \dots$$

oder, wie man dafür symbolisch auch schreibt,

$$S,\ S^2,\ S^3, \dots$$

bilden. Wenn aber überdies noch eine gewisse Anzahl Wiederholungen von $S$, z. B. $S^m$, die identische Substitution ergäbe, so hätte man

1) Vergl. Weber, Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891, S. 173.

doch nur eine endliche Anzahl, nämlich $m-1$ verschiedene Substitutionen. In diesem Fall sprechen wir von einer *endlichen*, im entgegengesetzten von einer *unendlichen Gruppe der Differentialgleichung.*

Den Inhalt dieses Artikels fassen wir dahin zusammen:

*Jedem singulären Punkt entspricht eine Fundamentalsubstitution. Die Gesamtheit der Fundamentalsubstitutionen und der aus ihnen durch Zusammensetzung abzuleitenden Substitutionen bildet die Gruppe der Differentialgleichung. Diese kann endlich oder unendlich sein.*

**45. Beispiele.** Zwei Beispiele mögen den Begriff der *endlichen und unendlichen Gruppe* noch veranschaulichen, während wir später eine ganze Klasse von Differentialgleichungen hervorheben werden, bei denen die Gruppe endlich ist. (Art. 110.)

*1. Beispiel:* Die Functionen von $x$

$$y_1 = x - a, \quad y_2 = \sqrt{x-a},$$

wo $a$ ein beliebiger, von Null verschiedener constanter Wert ist, sind linear unabhängig und können daher als Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung gewählt werden, welche dann lautet

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x-a, & 1, & 0 \\ \sqrt{x-a}, & \frac{1}{2\sqrt{x-a}}, & -\frac{1}{4\sqrt{(x-a)^3}} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(15^a) \qquad (x-a)^2 y'' - \frac{1}{2}(x-a)y' + \frac{1}{2}y = 0.$$

Bei der regulären Stelle $x=0$ haben wir das Fundamentalsystem

$$y_1 = x - a, \quad y_2 = \sqrt{x-a},$$

wo die Quadratwurzel mit einem beliebigen aber bestimmten der beiden Vorzeichen genommen ist (und natürlich auch, wie es die allgemeine Theorie voraussetzt, in der Umgebung von $x=0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von $x$ entwickelt werden kann). $x-a$ ist nun in der ganzen Ebene eindeutig, $\sqrt{x-a}$ multipliciert sich mit $-1$ beim Durchlaufen der zu $x=a$ gehörigen Fundamentalschleife und ist eindeutig in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet, das $x=a$ nicht enthält. Folglich führt ein ganz beliebiger Umlauf von $x=0$ aus die Integrale $y_1, y_2$ entweder in sich selbst über, oder in

$$(16) \qquad \begin{cases} \overline{y}_1 = y_1 \\ \overline{y}_2 = -y_2. \end{cases}$$

Abgesehen von der *identischen* Substitution, erhalten wir also nur die eine einzige

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

*Die Gruppe der Differentialgleichung* (15) *ist daher eine endliche.*

2. *Beispiel:* Die Functionen

$$y_1 = x - a, \quad y_2 = (x-a)\log(x-a),$$

wo $a$ ein beliebiger constanter, von Null verschiedener Wert ist und von der unendlich vieldeutigen Function $\log(x-a)$ etwa durch bestimmte Wahl ihres Wertes für $x = 0$ ein bestimmter Zweig fixiert sei, sind wieder linear unabhängig, wie man direkt leicht zeigen oder aus einem der Sätze im Anhang, Zu Kap. IV, (Satz 5), ablesen kann. $y_1$ ist in der ganzen Ebene *eindeutig*, $y_2$ in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet, welches den Punkt $x = a$ nicht enthält. Beim einmaligen Umlauf um $x = a$ in dem als positiv festgesetzten Sinn vermehrt sich $\log(x-a)$ um $2\pi i$ und vermindert sich bei dem entgegengesetzten Umlauf um dieselbe Grösse. Bei einem beliebigen Umlauf von $x = 0$ aus geht also $\log(x-a)$ über in

$$\log(x-a) + 2m\pi i,$$

wo $m$ jeden positiven und negativen ganzzahligen Wert oder den Wert Null annehmen kann. Bei einem solchen beliebigen Umlauf gehen also $y_1, y_2$ in

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = y_1 \\ \bar{y}_2 = 2m\pi i y_1 + y_2 \end{cases} \tag{18}$$

über, d. h. sie erleiden bei allen möglichen Umläufen die Substitionen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2m\pi i & 1 \end{pmatrix} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{19}$$

$y_1, y_2$ sind nun ein Fundamentalsystem von Integralen für die Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x-a & 1 & 0 \\ (x-a)\log(x-a), & 1 + \log(x-a), & \dfrac{1}{x-a} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$y''(x-a)^2 - y'(x-a) + y = 0, \tag{20}$$

*deren Gruppe* von den sämtlichen Substitutionen $S$ (19) gebildet wird, also *unendlich ist.*

## Kapitel VII.

### Analytische Gestalt der Integrale bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit[1]).

**46. Anwendung der Fuchs'schen Methode.** Nach der im Artikel 32 gegebenen Uebersicht haben wir jetzt die Aufgabe, die Integrale in der Umgebung einer *beliebigen Stelle der Bestimmtheit* zu untersuchen. Zunächst nämlich besitzen wir bei einer solchen ein Fundamentalsystem nur dann, wenn sie eine reguläre Stelle ist, oder allgemeiner, wenn die determinierende Gleichung $n$ von einander verschiedene Wurzeln besitzt, deren jeder eine Reihe entspricht. Dass $n$ solche reihenförmige Integrale linear unabhängig sind, folgt aus den im Anhang zusammengestellten Sätzen über linear unabhängige Functionen (s. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 2 und 3).

Von diesen speziellen Fällen abgesehen, besitzen wir also in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit erst weniger als $n$ Integrale, und es fragt sich daher: wie gelangen wir in diesem Fall zu einem Fundamentalsystem und welches ist die allgemeine analytische Gestalt seiner Elemente?

Wenn $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, so kann unsere Differentialgleichung in die Gestalt

$$(1)\qquad P(x,y) = x^n y^{(n)} + x^{n-1}\mathfrak{P}_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{P}_n(x) y = 0$$

gesetzt werden, wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen sind, die sämtlich in der Umgebung $U$ von $x = 0$ convergieren. Die zugehörige determinierende Function lautet, wenn wir die Unbekannte jetzt $r$ nennen, nach Art. (7) Formel (9)

$$(2)\qquad F(r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + \mathfrak{P}_1(0) r(r-1)\ldots(r-n+2) + \cdots + \mathfrak{P}_n(0).$$

Die $n$ Wurzeln der determinierenden Gleichung

$$r_1\, r_2 \ldots r_n$$

---

1) Der Hauptinhalt dieses Kapitels stammt von Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66 (1866). Nr. 5 u. 6.

seien in die einzelnen Gruppen gesondert und etwa

$$r_1 \, r_2 \, \ldots \, r_\lambda$$

die sämtlichen Wurzeln einer Gruppe, die wir auch kurz durch $g$ bezeichnen wollen. Diese Zahlen unterscheiden sich also nur um ganze Zahlen oder Null von einander und sollen in dieser Reihenfolge so geordnet sein, dass die reellen Teile beim Fortschreiten von $r_1$ zu $r_\lambda$ niemals wachsen[1]).

Nach Artikel 11 giebt es dann ein Integral

$$y_1 = x^{r_1} \cdot \varphi_1(x), \tag{3}$$

welches zu der Wurzel $r_1$ mit dem grössten reellen Teil gehört, und worin $\varphi_1(x)$ eine in der ganzen Umgebung $U$ convergente gewöhnliche Potenzreihe mit von Null verschiedenem constanten Glied ist. Ob etwa noch zu andern Wurzeln der Gruppe $g$ Integrale in Reihenform gehören, lassen wir vorläufig ganz dahingestellt. Haben wir aber *ein* Integral und wollen weitere von jenem und untereinander linear unabhängige Integrale finden, so bietet sich als Mittel hierzu die im Artikel 30 besprochene Fuchs'sche Methode dar.

Wir setzen daher in (1)

$$y = y_1 \int z \, dx \tag{4}$$

und erhalten dadurch (s. Art. 29)

$$P\left(x, y_1 \int z \, dx\right) = Q(x, z), \tag{5}$$

wenn

$$\begin{aligned} (6) \quad Q(x, z) := {} & x^n z^{(n-1)} y_1 \\ & + x^{n-1} z^{(n-2)} \left[ \binom{n}{1} x y_1' + y_1 \mathfrak{P}_1 \right] \\ & + x^{n-2} z^{(n-3)} \left[ \binom{n}{2} x^2 y_1'' + \binom{n-1}{1} x y_1' \mathfrak{P}_1 + y_1 \mathfrak{P}_2 \right] \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + xz \left[ n x^{n-1} y_1^{(n-1)} + (n-1) x^{n-2} y_1^{(n-2)} \mathfrak{P}_1 + \cdots + y_1 \mathfrak{P}_{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Für die Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $z$

$$Q(x, z) = 0 \tag{1'}$$

ist aber $x = 0$ wieder Stelle der Bestimmtheit und ihre Umgebung wiederum $U$. Dividiert man nämlich die ganze Gleichung durch $x y_1$

1) In Kap. II wurden Wurzeln der determinierenden Gleichung, die einer Gruppe angehören, mit $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu$ bezeichnet. Der Wechsel in der Bezeichnung geschieht nicht willkürlich: jene Zeichen waren dort bequemer, die neuen sind hier übersichtlicher.

— und zwar durch $x$ ausserhalb, durch $y_1$ innerhalb der eckigen Klammern —, so ist unsere Behauptung erwiesen, sobald gezeigt wird, dass in den eckigen Klammern alsdann nur gewöhnliche, in $U$ convergente Potenzreihen von $x$ stehen. Das ist aber der Fall, da der Klammerinhalt ein Aggregat von den innerhalb $U$ convergenten Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2, \ldots$, jede dieser mit einer der Grössen

$$\frac{x^\nu \cdot y_1^{(\nu)}}{y_1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

multipliciert, wird. Hier hebt sich in Zähler und Nenner der Factor $x^{r_1}$ fort; es bleibt der Quotient zweier gewöhnlichen Potenzreihen, dessen Nenner für $x = 0$ nicht verschwindet, und der mithin in dem Kreis, in welchem beide (Zähler und Nenner) convergieren, d. h. in $U$, wieder in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar ist.

Wir haben es also nun mit der Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (1′) zu thun, für welche $x = 0$ wieder Stelle der Bestimmtheit mit derselben Umgebung $U$ ist.

**47. Aufstellung von Integralgruppen.** Um nun ein Integral von (1′) zu finden, welches uns dann vermittelst (4) ein solches von (1) liefert, müssen wir die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function von (1′) bilden.

Da für $x = 0$ die Grössen

$$\frac{x^\nu y_1^{(\nu)}}{y_1} = \frac{x^\nu (x^{r_1} \varphi_1(x))^{(\nu)}}{x^{r_1} \varphi_1(x)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

die Werte

$$r_1(r_1 - 1) \ldots (r_1 - \nu + 1)$$

annehmen, wird die gesuchte determinierende Function, die wir mit $F_1(r)$ bezeichnen,

$$(2') \quad \begin{aligned} F_1(r) \equiv\ & r(r-1)\ldots(r-n+2) \\ & + r(r-1)\ldots(r-n+3)[n r_1 + \mathfrak{P}_1(0)] \\ & + r(r-1)\ldots(r-n+4)\left[\binom{n}{2} r_1(r_1-1) + \binom{n-1}{1} r_1 \mathfrak{P}_1(0) + \mathfrak{P}_2(0)\right] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + [n r_1(r_1-1)\ldots(r_1-n+2) \\ & \quad + (n-1) r_1 \ldots (r_1-n+3)\mathfrak{P}_1(0) + \cdots + \mathfrak{P}_{n-1}(0)]. \end{aligned}$$

Multipliciert man diesen Ausdruck mit $r+1$ und fasst immer zusammen, was mit derselben Grösse $\mathfrak{P}_\nu(0)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, bezw. mit keiner derselben multipliciert ist, so folgt nach der Formel (wo $a$ und $b$ beliebig, $k$ eine positive ganze Zahl bedeutet)

$$\begin{aligned}
&a(a-1)\ldots(a-k+1)\\
&+\binom{k}{1}a(a-1)\ldots(a-k+2)b\\
&+\binom{k}{2}a(a-1)\ldots(a-k+3)b(b-1)\\
&+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&+b(b-1)\ldots(b-k+1)\\
&=(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-k+1)\;^{1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r+1)F_1(r) = {} & [(r+r_1+1)(r+r_1)\ldots(r+r_1-n+2)-r_1(r_1-1)\ldots(r_1-n+1)]\\
&+\mathfrak{P}_1(0)[(r+r_1+1)\ldots(r+r_1-n+3)-r_1(r_1-1)\ldots(r_1-n+2)]\\
&+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&+\mathfrak{P}_{n-1}(0)[r+r_1+1-r_1].
\end{aligned}$$

Da nun $r_1$ eine Wurzel von $F(r)=0$, mithin das Aggregat der negativen Glieder in dem vorangehenden Ausdruck $=+\mathfrak{P}_n(0)$ ist, so hat man

$$F_1(r)(r+1)=F(r+r_1+1)=(r+1)(r+r_1+1-r_2)\ldots(r+r_1+1-r_n)$$

oder

$$F_1(r)=(r+r_1+1-r_2)\ldots(r+r_1+1-r_n).$$

Folglich sind die Wurzeln der zu (1′) gehörigen determinierenden Gleichung des Punktes $x=0$

$$r_2-r_1-1,\quad r_3-r_1-1,\ldots,r_n-r_1-1.$$

Von diesen bilden

$$r_2-r_1-1,\quad r_3-r_1-1,\ldots,r_\lambda-r_1-1$$

wieder eine bereits nach demselben Prinzip wie $g$ geordnete Gruppe $g'$, da es lauter negative ganze Zahlen oder Null sind, welche bei der angeschriebenen Reihenfolge nicht wachsen; keine andere Wurzel der Gleichung $F_1(r)=0$ gehört zu derselben Gruppe $g'$. Folglich giebt es ein Integral der Differentialgleichung (1′) von der Form

(3′) $$z_2=x^{r_2-r_1-1}\cdot\varphi_2(x),$$

wo $\varphi_2$ eine innerhalb $U$ convergente gewöhnliche Potenzreihe von $x$ mit von Null verschiedenem constanten Glied ist. Demnach haben wir als zweites Integral von (1)

(7) $$y_2=x^{r_1}\varphi_1\int x^{r_2-r_1-1}\varphi_2\,dx.$$

So fortfahrend erhalten wir eine Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung (1″), deren abhängige Variable $u$ heisse, deren determinierende Gleichung die Wurzelgruppe $g''$

1) Ein Beweis dieser Formel ergiebt sich z. B. durch $k$-fache Differentiation der Identität $x^a\cdot x^b=x^{a+b}$.

$$r_3 - r_2 - 1, \quad r_4 - r_2 - 1, \ldots, r_\lambda - r_2 - 1$$

besitzt, und die folglich ein Integral

$$u_3 = x^{r_3 - r_2 - 1} \cdot \varphi_3(x) \tag{3''}$$

hat, u. s. w. Endlich gelangt man zu einer Gleichung $(n - \lambda + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren abhängige Variable $w$ heisse, deren determinierende Gleichung die nur noch aus einem Element bestehende Wurzelgruppe $g^{(\lambda-1)}$

$$r_\lambda - r_{\lambda-1} - 1$$

besitzt, und die also ein Integral

$$w_\lambda = x^{r_\lambda - r_{\lambda-1} - 1} \varphi_\lambda(x)$$

hat, wo $\varphi_\lambda$ eine in $U$ convergente gewöhnliche Potenzreihe mit von Null verschiedenem constanten Glied ist.

Für unsere vorgelegte Differentialgleichung (1) erhalten wir mithin entsprechend der Wurzelgruppe $g$ der determinierenden Gleichung eine *Gruppe $\Gamma$ von Integralen*

$$\tag{8} \begin{cases} y_1 = y_1 \\ y_2 = y_1 \int z_2 \, dx \\ y_3 = y_1 \int z_2 \, dx \int u_3 \, dx \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_\lambda = y_1 \int z_2 dx \int u_3 \, dx \int \ldots \int w_\lambda dx, \end{cases}$$

wobei alle Integrationsconstanten willkürlich bleiben,

$$\tag{9} \begin{cases} y_1 = x^{r_1} \varphi_1(x) \\ z_2 = x^{r_2 - r_1 - 1} \varphi_2(x) \\ u_3 = x^{r_3 - r_2 - 1} \varphi_3(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w_\lambda = x^{r_\lambda - r_{\lambda-1} - 1} \varphi_\lambda(x), \end{cases}$$

und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda$ lauter in der Umgebung $U$ gültige gewöhnliche Potenzreihen von $x$ mit von Null verschiedenem constanten Anfangsglied sind.

Verfährt man so bei allen Wurzeln der determinierenden Gleichung, so erhält man $n$ Integrale, welche in Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ der Gestalt (8) eingeteilt sind. Dass die Integrale einer Gruppe untereinander linear unabhängig sind, folgt aus der Art ihrer Erzeugung (s. Art. 30); dass aber auch zwischen den Integralen verschiedener Gruppen eine lineare Abhängigkeit unmöglich ist, die $n$ Integrale also ein Fundamentalsystem bilden, werden wir im nächsten Artikel zugleich mit der analytischen Gestalt der Integrale (8) nach Ausführung der Integrationen erkennen.

**48. Analytische Gestalt der Gruppen-Integrale.** Die allgemeine analytische Gestalt der Integrale einer Gruppe wie $\Gamma$ nach Ausführung der in (8) angedeuteten Integrationen ist leicht zu ermitteln. Da $z_2, u_3, \ldots, w_\lambda$ sämtlich eindeutige Functionen von $x$ mit negativen ganzzahligen Anfangsexponenten sind, so ergiebt die bei jedem Integral zuerst auszuführende Integration wieder eine eindeutige Function und im Allgemeinen, wenn nämlich die Potenz $x^{-1}$ in dem Integranden nicht fehlt — ein Glied mit $\log x$. Die nächste Integration liefert[1]), nachdem wieder mit einer eindeutigen Function multipliciert ist, eine eindeutige Function + einer solchen, multipliciert mit $\log x$, + einem Gliede mit $\log^2 x$. Bei den Gliedern, die mit Potenzen von $\log x$ multipliciert sind, muss man immer hinzufügen „im Allgemeinen"; u. s. w. Zuletzt wird der ganze Ausdruck mit $y_1 \equiv x^{r_1} \varphi_1(x)$ multipliciert. Jedes der Integrale $y_1\, y_2 \ldots y_\lambda$ ist daher eine ganze Function von $\log x$, deren Grad (in $\log x$) höchstens gleich der Anzahl der ausgeführten Integrationen, also bei $y_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda)$ höchstens $\alpha - 1$ ist, und deren Coefficienten, abgesehen von dem Factor $x^{r_1}$, eindeutige Functionen von $x$ sind, mit einer *endlichen* Anzahl negativer Potenzen oder Reihen, die sich bei $x = 0$ bestimmt verhalten. Der Convergenzbezirk ist für alle diese Reihen wiederum $U$, weil die Reihen $y_1, z_2, u_3, \ldots, w_\lambda$ in dieser Umgebung von $x = 0$ convergieren und durch die Integration der Convergenzbereich nicht geändert wird.

Die analytische Gestalt der in der Gruppe $\Gamma$ zusammengestellten Integrale nach Ausführung der Integrationen ist also diese

$$(8^a) \qquad \begin{cases} y_1 \equiv \psi_{11} \\ y_2 \equiv \psi_{21} + \psi_{22} \log x \\ y_3 \equiv \psi_{31} + \psi_{32} \log x + \psi_{33} \log^2 x \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_\lambda \equiv \psi_{\lambda 1} + \psi_{\lambda 2} \log x + \psi_{\lambda 3} \log^2 x + \cdots + \psi_{\lambda\lambda} \log^{\lambda - 1} x, \end{cases}$$

wo sämtliche $\psi_{\alpha\beta}$ bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende, innerhalb $U$ convergente und abgesehen von dem Factor $x^{r_1}$ eindeutige Reihen sind, von denen die mit Potenzen von $\log x$ multiplicierten auch sämtlich oder teilweise identisch gleich Null sein können.

Zu dem entsprechenden Resultat gelangt man bei den anderen Integralgruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$. Da aber jede derselben einer *andern* Wurzelgruppe der determinierenden Gleichung zugeordnet ist, so enthalten die Reihen $\psi$ in jeder der Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ andere

1) Die nähere Ausführung findet sich im nächsten Artikel und dem zugehörigen Abschnitt des Anhangs.

Potenzen von $x$ als in den übrigen. Hieraus folgt[1]), dass au
lineare Relation zwischen den Integralen verschiedener Gruppen
lich ist, dass also die $n$ in die Gruppen $\Gamma$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, ... eing
Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

Wir dehnen nunmehr den Begriff „*eine Function verhält s*
*einer gewissen Stelle* z. B. $x = 0$ *bestimmt*“, der bisher nur für
tionen in Reihengestalt definirt war, auf Functionen der Form

$$\Psi \equiv \psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_\sigma \log^\sigma x \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

aus, wo $\psi_0\, \psi_1 \ldots \psi_\sigma$ sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende
sind, die nach Potenzen von $x$ fortschreiten und sämtlich dur
sonderung ein und derselben Potenz von $x$ eindeutig werden[2]
hören dann die Reihen $\psi_0\, \psi_1 \ldots \psi_\sigma$ bezw. zu den Exponenten

$$\varrho_0\, \varrho_1 \ldots \varrho_\sigma,$$

von denen derjenige mit dem kleinsten reellen Teil mit $\varrho$ bez
werde, so wollen wir auch von der Function $\Psi$ sagen: *sie ge*
*dem Exponenten oder zu der Zahl* $\varrho$. Unter Umständen kommt
noch darauf an, hervorzuheben, *welche* der Functionen $\psi_0$, $\psi_1$
$\varrho$ gehört oder — wenn mehrere von ihnen zu derselben Zahl
hören —, welches die *letzte* von diesen in der Reihenfolge $\psi_0\, \psi_1$
Ist dies etwa $\psi_{\gamma-1}$, während $\psi_\gamma, \psi_{\gamma+1} \ldots, \psi_\sigma$ zu Exponent
grösserem reellen Teil gehören, so sagen wir: $\Psi$ *gehört zu*
$\gamma^{ter}$ *Stelle stehenden Exponenten* $\varrho$. Hiernach ist $x^{-\varrho} . \Psi$ eine
Function von $\log x$, deren Coefficienten gewöhnliche Potenzreih
$x$ sind, von denen mindestens eine mit einer von Null versch
Constanten beginnt. Die Function $x^{-\varrho} . \Psi$ wird demnach für
nicht Null und — wenn sie unendlich wird — nur unendlich
Ausdruck

$$a_0 + a_1 \log x + \cdots + a_\sigma \log^\sigma x,$$

wo $a_0\, a_1 \ldots a_\sigma$ Constanten sind. Die übrigen Glieder versch
nämlich bei $x = 0$, weil bei positivem $\alpha$

$$\lim_{(x=0)} x^\alpha \log^\beta x = 0$$

ist. Hierdurch rechtfertigt sich die Ausdehnung des Begriff
Function verhält sich bestimmt“ auf Functionen der Gestalt $\Psi$

Mit Hülfe dieser Terminologie lässt sich nun der Inhalt

1) S. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 6.

2) Thomé nennt Integrale, die sich in diesem Sinne bestimmt v
*reguläre Integrale.* (Crelles Journ. Bd. 75. (1873.) S. 266.)

letzten Artikel und damit das Hauptergebnis des gegenwärtigen Kapitels folgendermassen aussprechen:

*Bei einer Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ existiert ein Fundamentalsystem von Integralen, dessen sämtliche Elemente sich bei $x = 0$ bestimmt verhalten. Jeder Wurzelgruppe $g$ $(r_1\, r_2 \ldots r_\lambda)$ der zugehörigen determinierenden Gleichung entspricht nämlich eine Gruppe $\Gamma$ von ebensoviel $(\lambda)$ Integralen*

$$y_\alpha \equiv \psi_{\alpha 1} + \psi_{\alpha 2} \log x + \ldots + \psi_{\alpha\alpha} \log^{\alpha - 1} x \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

*wo die $\psi_{\alpha\beta}$ bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende, in der ganzen Umgebung $U$ des Punktes $x = 0$ convergente Reihen sind und zu Exponenten gehören, die sich von $r_1$ höchstens um ganze Zahlen unterscheiden.*

Da aber sämtliche Integrale der Differentialgleichung sich durch die Elemente dieses Fundamentalsystems ausdrücken lassen, *verhalten sich* — in diesem noch etwas erweiterten Sinn — *bei einer Stelle der Bestimmtheit die sämtlichen Integrale der Differentialgleichung bestimmt.* Hierdurch rechtfertigt sich jetzt jene Benennung einer Stelle, deren zugehörige determinierende Gleichung die Ordnung der Differentialgleichung als Grad hat.

**49. Zugehörigkeit der Integrale zu den Wurzeln der determinierenden Gleichung.** Um zu erkennen, zu welchen Exponenten die sich bestimmt verhaltenden Integrale ($8^a$) gehören, müssen wir noch etwas näher auf die Ausführung der einzelnen Integrationen eingehen, welche

$$y_\alpha = y_1 \int z_2\, dx \int u_3\, dx \int \ldots \int s_{\alpha-1}\, dx \int v_\alpha\, dx \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots, \lambda)$$

in die Gestalt

$$y_\alpha = \psi_{\alpha 1} + \psi_{\alpha 2} \log x + \cdots + \psi_{\alpha\alpha} \log^{\alpha - 1} x$$

überführen. Hierzu bedürfen wir des Satzes[1]):

*Wenn die bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende Function*

$$\Psi = \psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_\sigma \log^\sigma x \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

*zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\varrho$ gehört, so verhält sich die Function*

$$\int \Psi\, dx$$

*bei $x = 0$ ebenfalls bestimmt und gehört zu dem Exponenten $\varrho + 1$. Wenn $\varrho = -1$ ist, steht in $\int \Psi\, dx$ dieser Exponent $(\varrho + 1 = 0)$ an $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$, andernfalls an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle.*

1) S. Anhang.

Diesem Satz fügen wir den zweiten, welcher evident ist, hinzu:

*Ist*

$$\Psi \equiv \psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_\sigma \log^\sigma x$$

*eine bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende, zu dem an $\gamma^{ter}$ Stelle stehenden Exponenten $\varrho$ gehörige Function, $\psi$ eine zu $\bar{\varrho}$ gehörige Reihe, welche sich bei $x = 0$ bestimmt verhält, so ist*

$$\Psi \,.\, \psi$$

*eine wie $\Psi$ gestaltete Function, die zu dem an $\gamma^{ter}$ Stelle stehenden Exponenten $\varrho + \bar{\varrho}$ gehört.*

Nun gehört in dem Integral $y_\alpha$ nach (9)

$$v_\alpha \text{ zu } r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1,$$

also

$$\int v_\alpha dx \text{ zu } r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1 + 1$$

und zwar an erster oder zweiter Stelle, je nach dem $r_\alpha \neq r_{\alpha-1}$ oder $r_\alpha = r_{\alpha-1}$. Mit derselben Massgabe gehört

$$s_{\alpha-1}\int v_\alpha dx \text{ zu } r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1 + 1 + r_{\alpha-1} - r_{\alpha-2} - 1 \equiv r_\alpha - r_{\alpha-2} - 1$$

an erster oder zweiter Stelle,

$$\int s_{\alpha-1} dx \int v_\alpha dx \text{ zu } r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1 + 1 + r_{\alpha-1} - r_{\alpha-2} - 1 + 1 \equiv r_\alpha - r_{\alpha-2}$$

an erster Stelle, wenn $r_\alpha \neq r_{\alpha-1}$, an zweiter Stelle, wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} \neq r_{\alpha-2}$, an dritter Stelle, wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} = r_{\alpha-2}$ u. s. w.

Folglich gehört endlich

$$y_\alpha \equiv y_1 \int z_2 dx \int \ldots \int s_{\alpha-1} dx \int v_\alpha dx$$

zu

$$r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1 + 1 + r_{\alpha-1} - r_{\alpha-2} - 1 + 1 + \cdots + r_1 \equiv r_\alpha$$

und zwar an $\gamma^{ter}$ Stelle, wenn

$$r_\alpha = r_{\alpha-1} = r_{\alpha-2} = \cdots = r_{\alpha-\gamma+1} \neq r_{\alpha-\gamma}.$$

Wir haben daher das Resultat:

*Die Integrale (8ᵃ) der Gruppe $\Gamma$ gehören der Reihe nach bezw. zu den Wurzeln $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ der Wurzelgruppe $g$ der determinierenden Gleichung, und zwar gehört $y_\alpha$ zu der an $\gamma^{ter}$ Stelle stehenden Wurzel $r_\alpha$, wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} = \cdots = r_{\alpha-\gamma+1} \neq r_{\alpha-\gamma}$ ist. Die $n$ Elemente des in die Gruppen $\Gamma$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2, \ldots$ eingeteilten Fundamentalsystems $y_1,\, y_2 \ldots y_n$ gehören bezw. zu den Wurzeln $r_1,\, r_2 \ldots r_n$ der determinierenden Gleichung.*

Um dies in den Formeln sichtbar zu machen, können wir auch

$$\psi_{\alpha\beta} \equiv x^{r_\alpha} \varphi_{\alpha\beta} \qquad \binom{\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda}{\beta = 1, 2, \ldots, \alpha}$$

setzen, wo die $\varphi_{\alpha\beta}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind und $\varphi_{\alpha\gamma}$ in der Reihenfolge $\varphi_{\alpha 1}\, \varphi_{\alpha 2} \ldots \varphi_{\alpha\alpha}$ die letzte ist, welche mit einer von

Null verschiedenen Constanten beginnt. Dann erhält die Integralgruppe $\Gamma$ die Gestalt

$$(8^b)\quad\begin{cases} y_1 \equiv x^{r_1}\varphi_{11} \\ y_2 \equiv x^{r_2}[\varphi_{21} + \varphi_{22}\log x] \\ y_3 \equiv x^{r_3}[\varphi_{31} + \varphi_{32}\log x + \varphi_{33}\log^2 x] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_\lambda \equiv x^{r_\lambda}[\varphi_{\lambda 1} + \varphi_{\lambda 2}\log x + \varphi_{\lambda 3}\log^2 x + \cdots + \varphi_{\lambda\lambda}\log^{\lambda-1}x]. \end{cases}$$

**50. Folgerungen.** Wir knüpfen noch eine Reihe von Bemerkungen und Folgerungen an das im Vorangehenden aufgestellte Fundamentalsystem von Integralen bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit.

Da in dem beliebigen Integral $y_\alpha$ der Gruppe $\Gamma$ die sämtlichen $\alpha - 1$ Integrationsconstanten willkürlich gelassen wurden, so ist dasselbe, wie aus der ursprünglichen Gestalt (8) der Gruppe folgt, nur bis auf eine additive lineare homogene Verbindung der ihm in seiner Gruppe vorangehenden Integrale $y_1\ y_2 \ldots y_{\alpha-1}$ bestimmt. Anders ausgedrückt: das Integral $y_\alpha$, in welchem die $\alpha - 1$ Integrationsconstanten noch willkürlich sind, ändert sich nicht, wenn man eine lineare homogene Function von $y_1\ y_2 \ldots y_{\alpha-1}$ mit willkürlichen Coefficienten hinzufügt. Wenn trotzdem im Folgenden vielfach von linearen homogenen Verbindungen von $y_1\ y_2 \ldots y_\alpha$ die Rede ist, so ist dies so zu verstehen, dass in jedem dieser Integrale die willkürlichen Constanten zuvor in irgend einer Weise fixiert gedacht werden.

Ist nun

$$\eta \equiv \psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_\sigma \log^\sigma x$$

*irgend* ein Integral der Differentialgleichung, wo die $\psi$ nach Potenzen von $x$ fortschreiten, deren Exponenten sich von den Wurzeln der Gruppe $g\ \ (r_1\, r_2 \ldots r_\lambda)$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, so wollen wir es *ein in die Gruppe $\Gamma$ gehöriges Integral* nennen. Dasselbe ist als lineare homogene Function der Elemente des Fundamentalsystems $y_1\ y_2 \ldots y_n$ ausdrückbar. Aus den Sätzen über lineare Abhängigkeit von Functionen[1]) folgt aber leicht, dass es durch $y_1\ y_2 \ldots y_\lambda$, die Integrale der Gruppe $\Gamma$, allein ausdrückbar sein muss. Gehört weiter das Integral $\eta$ zu dem an bestimmter, etwa $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $r_\alpha$, so folgt aus denselben Sätzen (Satz 3 und 5), dass es sogar nur durch $y_1\ y_2 \ldots y_\alpha$ sich ausdrücken lässt, wenn $y_\alpha$ ebenfalls zu der an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Wurzel $r_\alpha$ gehört. Diese Ueberlegung sprechen wir folgendermassen aus:

1) S. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 6.

*Jedes in die Gruppe $\Gamma$ gehörige Integral, welches zu dem an $\gamma^{ter}$ Stelle stehenden Exponenten $r_\alpha$ gehört, ist in dem Integral $y_\alpha$, welches zu der an $\gamma^{ter}$ Stelle stehenden Wurzel $r_\alpha$ der determinierenden Gleichung gehört, enthalten.* Wir nennen aus diesem Grund das Integral $y_\alpha$, wenn die willkürlichen Constanten desselben unbestimmt bleiben, *das allgemeinste zu der an $\gamma^{ter}$ Stelle stehenden Wurzel $r_\alpha$ gehörige Integral der Gruppe $\Gamma$.*

Ebenso leicht beweist man, immer mit denselben Hülfsmitteln, den Satz:

*Jedes in die Gruppe $\Gamma$ gehörige Integral gehört zu einem der Exponenten $r_1\ r_2 \ldots r_\lambda$, welcher höchstens an sovielter Stelle steht, als die Multiplicität der betreffenden Wurzel beträgt.*

**51. Verzweigung der Integrale bei $x = 0$; Umlaufsrelationen.** Wir kommen nunmehr zu der für das Studium der Integrale in der Umgebung von $x = 0$ wichtigsten, nämlich zu der Frage, wie sich dieselben ändern, wenn $x$ einen Umlauf um den singulären Punkt $x = 0$ beschreibt, aber dabei ganz innerhalb der Umgebung $U$ desselben bleibt.

Wenn hierbei von einer *Änderung* der Integrale $y_1\ y_2 \ldots y_n$ die Rede ist, während doch die vieldeutigen Ausdrücke ((8), (8ª)) derselben schon sämtliche Werte enthalten, welche diese Integrale innerhalb $U$ überhaupt besitzen, so ist dies folgendermassen zu verstehen. Man denkt sich für einen nicht singulären Wert $x = x_0$ in der Umgebung $U$ *eines* der Wertsysteme, welches die Integrale $y_1 \ldots y_n$ für $x = x_0$ anzunehmen fähig sind, fixiert und sondert dadurch aus jeder der mehrdeutigen Functionen $y$ einen *bestimmten Zweig* aus, der *eindeutig* bleibt, solange $x$ von $x_0$ nach den Punkten von $U$ Wege beschreibt, welche $x = 0$ nicht einschliessen. Macht nun aber $x$ von $x_0$ aus einen Umlauf um $x = 0$, etwa in Form einer Kreisperipherie um den Mittelpunkt $x = 0$, so ändern sich in der That jene Zweige im Allgemeinen, und dies ist unter dem obigen kurzen Ausdruck zu verstehen. Man nennt deshalb die Art der Änderung auch *die Verzweigung der Integrale um den Punkt $x = 0$.*

Eindeutige Integrale, welche die Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe von $x$ haben, ändern sich bei einem Umlauf um $x = 0$ gar nicht. Nicht eindeutige Integrale in Reihenform, wie

$$y_1 = x^{r_1}\varphi_{11}(x),$$

multiplicieren sich nur mit einer Constanten. Denn $\varphi_{11}$ ist eindeutig; setzt man aber

$$x^{r_1} = e^{r_1 \log x},$$

so multipliciert sich $x^{r_1}$, da $\log x$ bei dem Umlauf um $x = 0$ in $\log x + 2\pi i$ übergeht, mit $e^{2r_1\pi i}$. Die logarithmen-behafteten Integrale sind aber im Allgemeinen in doppelter Weise mehrdeutig.

Ein beliebiges Integral der Gruppe $\Gamma$ sei nämlich wieder

$$\begin{aligned} y_\alpha &= x^{r_\alpha}[\varphi_{\alpha 1} + \varphi_{\alpha 2}\log x + \cdots + \varphi_{\alpha\alpha}\log^{\alpha-1}x] \\ &= \psi_{\alpha 1} + \psi_{\alpha 2}\log x + \cdots + \psi_{\alpha\alpha}\log^{\alpha-1}x, \end{aligned}$$

worin wir uns nun die willkürlichen Constanten in irgend einer Weise fixiert denken. Bei dem gedachten Umlauf gehe diese Function in $\bar{y}_\alpha$ über, welche wieder ein Integral der Differentialgleichung (1) ist, da man ja $x$ nur innerhalb der Umgebung $U$ sich bewegen liess und das Integral $y_\alpha$ für diesen ganzen Bereich definiert ist. Nun ändern sich bei diesem Umlauf die eindeutigen Functionen $\varphi_{\alpha\beta}$ gar nicht; dagegen geht

$$\begin{array}{lcl} \log x & \text{in} & \log x + 2\pi i \\ x^{r_\alpha} & \text{in} & x^{r_\alpha}\cdot e^{2r_\alpha\pi i} \end{array}$$

über. Setzen wir zur Abkürzung, da $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, also die folgenden Exponentialgrössen alle einander gleich sind,

$$(10) \qquad e^{2r_1\pi i} = e^{2r_2\pi i} = \cdots = e^{2r_\alpha\pi i} = \cdots = e^{2r_\lambda\pi i} = \omega_1,$$

so hat man also

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\omega_1}\bar{y}_\alpha = {} & \psi_{\alpha 1} + 2\pi i\,\psi_{\alpha 2} + (2\pi i)^2\psi_{\alpha 3} + (2\pi i)^3\psi_{\alpha 4} + \cdots + (2\pi i)^{\alpha-1}\psi_{\alpha\alpha} \\ & + \log x\,[\psi_{\alpha 2} + 2(2\pi i)\,\psi_{\alpha 3} + 3(2\pi i)^2\psi_{\alpha 4} + \cdots + (\alpha-1)(2\pi i)^{\alpha-2}\psi_{\alpha\alpha}] \\ & + \log^2 x\left[\psi_{\alpha 3} + \binom{3}{2}2\pi i\,\psi_{\alpha 4} + \cdots + \binom{\alpha-1}{2}(2\pi i)^{\alpha-3}\psi_{\alpha\alpha}\right] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \log^{\alpha-2}x\,[\psi_{\alpha,\alpha-1} + (\alpha-1)\,2\pi i\,\psi_{\alpha\alpha}] \\ & + \log^{\alpha-1}x\,\psi_{\alpha\alpha}. \end{aligned}$$

Hier ist auf der rechten Seite der Complex der ersten Glieder in jeder Zeile gerade $y_\alpha$. Der übrig bleibende Teil ist ein in die Gruppe $\Gamma$ gehöriges Integral, welches, wenn $y_\alpha$ zu der an erster Stelle stehenden Wurzel $r_\alpha$ gehört, also $r_\alpha \neq r_{\alpha-1}$ ist, zu einer der Wurzeln $r_{\alpha-1}, r_{\alpha-2}, \ldots, r_1$, oder, wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} = \cdots = r_{\alpha-\gamma+1} \neq r_{\alpha-\gamma}$ zu der an $(\gamma-1)^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Wurzel $r_\alpha$ gehört, also in beiden Fällen nach dem vorangehenden Artikel durch die Integrale $y_1, y_2 \ldots y_{\alpha-1}$ allein ausdrückbar ist. Aus (11) ergiebt sich daher

$$(12) \qquad \bar{y}_\alpha = \omega_{\alpha 1}y_1 + \omega_{\alpha 2}y_2 + \cdots + \omega_{\alpha,\alpha-1}y_{\alpha-1} + \omega_1 y_\alpha,$$

wo die $\omega_{\alpha\beta}$ Constanten sind, $\omega_1$ den in (10) angegebenen, von Null verschiedenen Wert hat.

Die Relationen, welche zwischen den Integralen $y_1\, y_2 \ldots y_n$ und den durch den Umlauf daraus erzielten $\bar{y}_1\, \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_n$ bestehen, oder — wie wir kurz sagen wollen — *die Umlaufsrelationen des Fundamentalsystems* $y_1\, y_2 \ldots y_n$ *in Bezug auf* $x = 0$ lauten also

$$
(13) \cdot \quad \begin{cases}
\bar{y}_1 = \omega_1 y_1 \\
\bar{y}_2 = \omega_{21} y_1 + \omega_1 y_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\bar{y}_\lambda = \omega_{\lambda 1} y_1 + \omega_{\lambda 2} y_2 + \cdots + \omega_{\lambda, \lambda-1} y_{\lambda-1} + \omega_1 y_\lambda \\
\bar{y}_{\lambda+1} = \omega_2 y_{\lambda+1} \\
\bar{y}_{\lambda+2} = \omega_{\lambda+2, 1} y_{\lambda+1} + \omega_2 y_{\lambda+2} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot ,
\end{cases}
$$

wenn $r_{\lambda+1}, r_{\lambda+2}, \ldots, r_{\lambda+\lambda_1}$ eine zweite Wurzelgruppe $g_1$ der determinierenden Gleichung bedeutet,

$$\omega_2 = e^{2 r_{\lambda+1} \pi i} = \ldots = e^{2 r_{\lambda+\lambda_1} \pi i}$$

gesetzt wird, u. s. w. —

Dass die $n$ durch den Umlauf aus $y_1\, y_2 \ldots y_n$ erzeugten Integrale $\bar{y}_1\, \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_n$ abermals ein Fundamentalsystem bilden, ist leicht zu sehen. Die Determinante dieser $n$ Functionen ist nämlich nach dem Determinanten-Multiplications-Theorem das Produkt der Determinante der $y_1\, y_2 \ldots y_n$ und der aus den $\omega_{\alpha\beta}$ und $\omega_1, \omega_2, \ldots$ gebildeten Substitutionsdeterminante[1]). Die erstere ist $\neq 0$, weil $y_1\, y_2 \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem bilden, die letztere hat den Wert

$$\omega_1^{\lambda} \cdot \omega_2^{\lambda_1} \ldots \ldots \neq 0.$$

Folglich bilden auch $\bar{y}_1\, \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen.

Als Hauptergebnis dieses Artikels sprechen wir aus:

*Bei einem Umlauf der unabhängigen Variablen um eine singuläre Stelle der Bestimmtheit geht jedes Element des in die Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ eingeteilten Fundamentalsystems $y_1\, y_2 \ldots y_n$ in eine lineare homogene Function von sich selbst und den ihm in seiner Gruppe vorangehenden Integralen über. Diese $n$ Functionen bilden wieder ein Fundamentalsystem von Integralen.*

---

1) Vergl. Baltzer, Theorie u. Anwend. d. Det. 5. Aufl. Leipzig 1881. § 6. 1. S. 48 ff.

**52. Lineare Abhängigkeit zwischen den Functionen $\psi_{\alpha\beta}$.** In der aus $\lambda$ Elementen bestehenden Integralgruppe $\Gamma$ treten im Ganzen $\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$ Reihen

$$\psi_{\alpha\beta} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, \lambda \\ \beta = 1, 2, \ldots, \alpha \end{pmatrix}$$

als Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\log x$ auf. Zwischen diesen bestehen aber noch lineare homogene Relationen, welche wir mit Hülfe des im vorigen Artikel abgeleiteten Resultates leicht ermitteln können, und vermöge deren die Zahl der linear unabhängigen Functionen $\psi_{\alpha\beta}$ in der aus $\lambda$ Elementen bestehenden Gruppe sich als $\lambda$ ergiebt.

Setzen wir nämlich in der Identität

$$\bar{y}_\alpha - \omega_1 y_\alpha = \omega_{\alpha 1} y_1 + \omega_{\alpha 2} y_2 + \cdots + \omega_{\alpha, \alpha-1} y_{\alpha-1}$$

für $y_1 y_2 \ldots y_\alpha$ und $\bar{y}_\alpha$ die expliciten Ausdrücke aus ($8^a$) und (11) ein, so ergiebt sich durch Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von $\log x$ auf beiden Seiten

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_1 [2\pi i\, \psi_{\alpha 2} + (2\pi i)^2 \psi_{\alpha 3} + \cdots + (2\pi i)^{\alpha-1} \psi_{\alpha\alpha}] \\ \qquad\qquad = \omega_{\alpha 1} \psi_{11} + \omega_{\alpha 2} \psi_{21} + \cdots + \omega_{\alpha, \alpha-1} \psi_{\alpha-1, 1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \omega_1 \left[ \binom{\alpha-2}{2} 2\pi i\, \psi_{\alpha, \alpha-1} + \binom{\alpha-1}{2} (2\pi i)^2 \psi_{\alpha\alpha} \right] \\ \qquad\qquad = \omega_{\alpha, \alpha-2} \psi_{\alpha-2, \alpha-2} + \omega_{\alpha, \alpha-1} \psi_{\alpha-1, \alpha-2} \\ \omega_1 (\alpha - 1)\, 2\pi i\, \psi_{\alpha\alpha} = \omega_{\alpha, \alpha-1} \psi_{\alpha-1, \alpha-1}. \end{cases}$$

Betrachtet man in diesem Gleichungssystem, welches für alle Werte $\alpha = 2, 3, \ldots, \lambda$ gilt, die Functionen $\psi_{\alpha 2}, \psi_{\alpha 3}, \ldots, \psi_{\alpha\alpha}$ als die Unbekannten, so ist die Determinante der Coefficienten auf der linken Seite von Null verschieden. Folglich lehrt das Gleichungssystem (14), dass die sämtlichen in $y_\alpha$ auftretenden Functionen $\psi_{\alpha\beta}$ mit Ausnahme von $\psi_{\alpha 1}$ sich durch die in den vorangehenden Integralen vorkommenden $\psi$ linear und homogen ausdrücken lassen. Damit ist schon gezeigt, dass nur die mit dem zweiten Index 1 behafteten $\lambda$ Reihen

$$\psi_{11}\; \psi_{21}\; \psi_{31} \ldots \psi_{\lambda 1}$$

linear unabhängig sind. Man kann aber auch sehen, wie die einzelnen Reihen $\psi_{\alpha\beta}$ von jenen abhängen.

Beginnt man mit der Berechnung von $\psi_{\alpha\alpha}$, so stellt sich dies nach der letzten der Gleichungen (14) als bis auf einen constanten Faktor mit $\psi_{\alpha-1, \alpha-1}$ übereinstimmend dar, und da von diesem wieder das Analoge gilt, so zeigt sich, dass $\psi_{\alpha\alpha}$ *bis auf einen constanten Faktor mit jeder der Reihen* $\psi_{\alpha-1, \alpha-1}, \psi_{\alpha-2, \alpha-2}, \ldots, \psi_{11}$ *übereinstimmt.*

Die Berechnung von $\psi_{\alpha,\alpha-1}$ zeigt, dass dies, abgesehen von dem soeben gefundenen $\psi_{\alpha\alpha}$, linear und homogen durch $\psi_{\alpha-1,\alpha-2}$, $\psi_{\alpha-2,\alpha-2}$ ausdrückbar ist, und mit Berücksichtigung des für $\psi_{\alpha\alpha}$ gefundenen Ergebnisses und des Umstandes, dass Analoges gilt, sobald man $\alpha$ durch $\alpha-1$, $\alpha-2$, u. s. w. ersetzt, ergiebt sich: *$\psi_{\alpha,\alpha-1}$ ist durch jedes der Paare*

$$\begin{array}{cc} \psi_{\alpha-1,\alpha-2}, & \psi_{\alpha-2,\alpha-2} \\ \psi_{\alpha-2,\alpha-3}, & \psi_{\alpha-3,\alpha-3} \\ \cdot & \cdot \\ \psi_{21} \quad , & \psi_{11} \end{array}$$

*linear und homogen ausdrückbar.* U. s. w.

Allgemein ergiebt sich so schrittweise das Resultat:

*$\psi_{\alpha\beta}$ ist eine lineare homogene Function von nur $\alpha-\beta+1$ anderen Functionen $\psi$, die im zweiten Index unter einander übereinstimmen, zwar so, dass $\psi_{\alpha\beta}$ nur von*

$$\psi_{\alpha-k,\beta-k}, \quad \psi_{\alpha-k-1,\beta-k}, \ldots, \psi_{\beta-k,\beta-k}$$

*abhängt, wo $k$ einen beliebigen der Werte $1, 2, \ldots, \beta-1$ bedeutet. In letzter Hand ist also $\psi_{\alpha\beta}$ nur von*

$$\psi_{11}, \quad \psi_{21}, \ldots, \psi_{\alpha-\beta+1,1}$$

*abhängig.*

**53. Grad der Gruppen-Integrale im Logarithmus.** Eine Reihe von Bemerkungen soll sich endlich noch auf den Grad beziehen, bis zu welchem $\log x$ in den einzelnen Integralen einer Gruppe aufsteigt.

Wie wir im Artikel 48 sahen, steigt in dem $\alpha^{\text{ten}}$ Integral $y_\alpha$ einer Gruppe $\Gamma$ der Logarithmus höchstens und im Allgemeinen wirklich bis zur $(\alpha-1)^{\text{ten}}$ Potenz $(\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda)$ auf. Es kann aber in speziellen Fällen eintreten, dass dieser Grad nicht erreicht wird, dass also eine oder mehrere der Functionen $\psi_{\alpha\beta}$ $(\beta = \alpha, \alpha-1, \ldots)$ identisch Null sind, wie man auch die Integrationsconstanten bestimmt. Aus den Betrachtungen in Artikel 50 folgt dann, dass der Grad der Integrale $y_1\, y_2 \ldots y_\lambda$ (worin alle Constanten unbestimmt bleiben) in $\log x$ beim Fortschreiten von $y_1$ zu $y_\lambda$ jedenfalls nie abnimmt. Andererseits ergiebt sich aus dem Satz am Schluss des vorigen Artikels, dass der Grad dieser Integrale in $\log x$ von Integral zu Integral höchstens um die Einheit zunehmen kann. Wir bemerken daher zunächst:

*Der Grad in $\log x$, bis zu welchem die allgemeinsten zu den Wurzeln $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ gehörigen Integrale $y_1\, y_2 \ldots y_\lambda$ thatsächlich aufsteigen, nimmt in dieser Folge nie ab und von Integral zu Integral höchstens um die Einheit zu.*

*Sind mehrere der Wurzeln* $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ *einander gleich, so treten sicher Logarithmen auf*, weil dann in einer oder mehreren der nach (8) zu integrierenden Reihen das Glied mit der Potenz $x^{-1}$ sicher nicht fehlt. Nach dem in Artikel 48 benutzten und im Anhang bewiesenen Satz enthält z. B. das Integral $y_\alpha$, wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} = \cdots = r_{\alpha-\gamma+1} \neq r_{\alpha-\gamma}$, $\log x$ sicher mindestens in der $(\gamma - 1)^{\text{ten}}$ Potenz.

Soll insbesondere die ganze Gruppe $y_1\, y_2 \ldots y_\lambda$ logarithmenfrei sein, d. h. alle $\psi_{\alpha\beta} \equiv 0$, wenn $\beta > 1$, so ist also eine notwendige Bedingung die, dass alle Wurzeln $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ von einander verschieden sind. Nach Artikel 16 sind wir aber im Besitz der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass nicht nur zu $r_1$, sondern auch zu jeder der Wurzeln $r_2\, r_3 \ldots r_\lambda$ ein logarithmenfreies Integral gehört. Haben wir aber $\lambda$ logarithmenfreie Integrale, die bezw. zu $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ gehören, so sind diese linear unabhängig [1]). Folglich kann es dann überhaupt kein in die Gruppe $\Gamma$ gehöriges, mit Logarithmen behaftetes Integral geben, weil dieses von jenen $\lambda$ linear unabhängig wäre und damit mehr als $n$ linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung existierten. Wir haben also das Ergebnis:

*Damit die ganze Integralgruppe* $\Gamma$ *logarithmenfrei sei, wenn* $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ *sämtlich von einander verschieden sind, ist notwendig und hinreichend, dass die nach Kap. II zu bildenden Determinanten*

$$\begin{array}{l}
D_{r_\lambda r_{\lambda-1}} \\
D_{r_\lambda (r_{\lambda-1}) r_{\lambda-2}}\ , \quad D_{r_{\lambda-1} r_{\lambda-2}} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
D_{r_\lambda (r_{\lambda-1} \ldots r_2) r_1}\ , \quad D_{r_{\lambda-1} (r_{\lambda-2} \ldots r_2) r_1}\ , \ \cdots, \ D_{r_2 r_1}
\end{array}$$

*sämtlich verschwinden* [2]).

Wir werden später sehen (Art. 69), dass wir im Art. 16 auch bereits die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür besitzen, dass der entgegengesetzte spezielle Fall eintritt, d. h. *dass in jedem der Integrale* $y_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda)$ *der Logarithmus bis zur höchstmöglichen,* $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ *Potenz thatsächlich aufsteigt.*

Bisher haben wir nur den Fall in's Auge gefasst, dass in den

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 3.

2) In anderen Formen sind die Bedingungen für dieselbe Frage aufgestellt worden von

Fuchs, Crelles Journ. Bd. 68. (1868) S. 375—378.

Frobenius, ebenda, Bd. 76. (1873.) S. 224—226.

Thomé, ebenda, Bd. 96. (1884.) S. 268 ff.

Goursat, Annales de l'école normale, 2me Série, t. 12. (1883). S. 261. No. I.

*allgemeinsten* zu $r_2 \ldots r_\lambda$ gehörigen Integralen der Logarithmus thatsächlich nicht bis zu der Potenz aufsteigt, die er höchstens erreichen kann. Es ist aber möglich, dass bei besonderer Bestimmung der in diesen allgemeinsten Integralen noch enthaltenen willkürlichen Constanten der Grad derselben in $\log x$ noch weiter zu reducieren ist. Verschwindet z. B. in dem zu $r_2$ gehörigen Integral $y_2$ der Logarithmus nicht, so enthält nach der ersten Bemerkung dieses Artikels auch das allgemeinste zu $r_3$ gehörige Integral $y_3$ den Logarithmus mindestens in der ersten Potenz. Ergeben dann aber die Bedingungen des Kap. II, dass zu $r_3$ ein logarithmenfreies Integral in Reihenform gehört, so muss dieses, wenn $r_3 \neq r_2$, nach Artikel 49 in $y_3$ enthalten sein. In dem allgemeinsten zu $r_3$ gehörigen Integral $y_3$ lässt sich also durch geeignete Verfügung über die willkürlichen Constanten der Grad des Logarithmus auf Null reducieren.

Diese Überlegung führt uns zu dem Wunsch nach einem Fundamentalsystem, das aus lauter möglichst einfach gebauten Integralen besteht, d. h. aus solchen, welche den Logarithmus in möglichst niedrigen Potenzen enthalten. Und weil sich dieser Wunsch mit Hülfe der bisher benutzten Methode nicht leicht befriedigen lässt, nehmen wir — auch in Rücksicht auf weitere Gesichtspunkte — die Untersuchung der Integrale bei einer singulären Bestimmtheitsstelle im folgenden Kapitel noch einmal in anderer Weise auf. Das gegenwärtige Kapitel beschliessen wir mit der Betrachtung eines Specialfalles, der die allgemeine Untersuchung illustriert.

**54. Differentialgleichungen mit einer einzigen singulären Stelle (der Bestimmtheit) im Endlichen.** Die schon im Artikel 10 als 2. Beispiel benutzte Differentialgleichung

$$(15) \qquad x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0,$$

wo $a_1\, a_2 \ldots a_n$ Constanten sind, besitzt $x = 0$ als einzige singuläre Stelle im Endlichen, und diese ist Stelle der Bestimmtheit. Die Umgebung $U$ derselben deckt sich also — gerade wie bei den linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten — mit dem ganzen Gebiet der Differentialgleichung, nämlich mit der gesamten $x$-Ebene.

Wir fanden damals: wenn $r_1$ eine Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung von (15)

$$(16) \qquad \begin{aligned} a_{rr} = {} & r(r-1)\ldots(r-n+1) \\ & + a_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \cdots + a_n = 0 \end{aligned}$$

ist, so genügt $x^{r_1}$ der Differentialgleichung (15). Sind die $n$ Wurzeln $r_1\, r_2 \ldots r_n$ der Gleichung (16) sämtlich verschieden, so bilden die $n$ Integrale

$$x^{r_1},\ x^{r_2},\ \ldots,\ x^{r_n}$$

ein Fundamentalsystem, wie unmittelbar einzusehen ist, gleichviel ob dabei mehrere der Wurzeln $r_1 \ldots r_n$ eine Gruppe constituieren oder nicht. Ist das Erstere der Fall, so haben wir also hier ein Beispiel dafür, dass in einer ganzen Gruppe von Integralen der Logarithmus fehlt.

Sind dagegen nicht alle Wurzeln $r_1\, r_2 \ldots r_n$ verschieden, sondern z. B.

$$r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = r_\gamma \neq r_{\gamma+1},$$

so werden die Integrale $x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_\gamma}$ identisch; aber nach der allgemeinen Theorie giebt es dann ein Integral, welches zu der an zweiter, eines, welches zu der an dritter, u. s. w., endlich eines, welches zu der an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Wurzel $r_1$ gehört. Diese finden wir durch Anwendung der Fuchs'schen Methode. Wir substituieren in (15)

$$y = x^{r_1} \int z\, dx$$

und erhalten dadurch nach Artikel 29 und 46 für $z$ die Gleichung

$$
\begin{aligned}
(17)\quad 0 = {} & z^{(n-1)} x^n x^{r_1} \\
& + z^{(n-2)} \left[ \binom{n}{1} x^n r_1 x^{r_1 - 1} + a_1 x^{n-1} x^{r_1} \right] \\
& + z^{(n-3)} \left[ \binom{n}{2} x^n r_1 (r_1 - 1) x^{r_1 - 2} + \binom{n-1}{1} a_1 x^{n-1} r_1 x^{r_1 - 1} + a_2 x^{n-2} x^{r_1} \right] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + z \left[ \binom{n}{1} x^n r_1 \ldots (r_1 - n + 2) x^{r_1 - n + 1} + \cdots\cdots + a_{n-1} x\, x^{r_1} \right],
\end{aligned}
$$

welche nach Fortlassung des Faktors $x^{r_1+1}$ wieder die Form

$$(18)\qquad x^{n-1} z^{(n-1)} + a_1' x^{n-2} z^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}' z = 0$$

erhält, wo $a_1'\, a_2' \ldots a_{n-1}'$ Constanten sind. Die Wurzeln der zugehörigen determinierenden Gleichung sind nach Artikel 46

$$r_2 - r_1 - 1,\quad r_3 - r_1 - 1, \ldots, r_\gamma - r_1 - 1, \ldots, r_n - r_1 - 1,$$

deren $\gamma - 1$ erste den Wert $-1$ haben. Folglich ist

$$z = x^{-1}$$

ein Integral von (18) und

$$x^{r_1} \int x^{-1} dx = C_0 x^{r_1} + x^{r_1} \log x$$

ein Integral von (15), wenn $C_0$ die willkürliche Integrationsconstante bedeutet. Da man dieses Integral noch mit einer beliebigen Constanten multiplicieren kann, möge es gleich in der Form geschrieben werden

$$C_0 x^{r_1} + C_1 x^{r_1} \log x .$$

Substituiert man nun in (18) abermals

$$z = x^{-1} \int u \, dx ,$$

so erhält man von der Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in $u$ wieder das Integral $u = x^{-1}$ und daraus das Integral

$$C_0 x^{r_1} + C_1 x^{r_1} \log x + C_2 x^{r_1} \log^2 x$$

der vorgelegten Differentialgleichung (15), wenn $C_0$ $C_1$ $C_2$ willkürliche Constanten sind. U. s. w.

Im Ganzen erhält man so entsprechend der $\gamma$-fachen Wurzel $r_1$ von (16) die $\gamma$ Integrale

$$(19) \quad \begin{cases} y_1 \equiv x^{r_1} C_0 \\ y_2 \equiv x^{r_1} [C_0 + C_1 \log x] \\ y_3 \equiv x^{r_1} [C_0 + C_1 \log x + C_2 \log^2 x] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_\gamma \equiv x^{r_1} [C_0 + C_1 \log x + C_2 \log^2 x + \cdots + C_{\gamma-1} \log^{\gamma-1} x], \end{cases}$$

welche bezw. zu der an erster, zweiter, dritter, u. s. w., $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Wurzel $r_1$ gehören, und wobei die $C$ willkürliche Constanten sind. Infolgedessen sieht man, dass aus dem letzten Integral $y_\gamma$ bei geeigneter Specialisierung der $C$ die vorhergehenden Integrale entstehen. An Stelle der $\gamma$ Integrale (19) kann man daher auch die ebenfalls linear unabhängigen

$$(20) \qquad x^{r_1}, \quad x^{r_1} \log x, \quad x^{r_1} \log^2 x, \ldots, x^{r_1} \log^{\gamma-1} x$$

setzen. Hiermit ist die vorgelegte Differentialgleichung vollständig integriert; denn wir haben gefunden:

*Sind $r_1$ $r_2 \ldots r_n$ die Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung der Differentialgleichung*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 ,$$

*wo die $a$ Constanten sind, so besitzen wir $n$ linear unabhängige Integrale; jeder einfachen Wurzel $r_i$ entspricht nämlich ein Integral $x^{r_i}$, jeder $\gamma$-fachen Wurzel $r_k$ $\gamma$ Integrale*

$$x^{r_k}, \quad x^{r_k} \log x, \ldots, x^{r_k} \log^{\gamma-1} x .$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der Integration der linearen homogenen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten (Art.

35. 36), so erkennt man, dass das hier ermittelte Fundamentalsystem in das dort gefundene durch die Substitution

$$x = e^{x'} \tag{21}$$

und umgekehrt jenes in dieses durch die inverse Substitution

$$x = \log x' \tag{21$^a$}$$

übergeht. Da aber durch ein Fundamentalsystem von Integralen eine Differentialgleichung selbst bestimmt ist, so folgt, dass durch die Substitution (21) die hier betrachtete Differentialgleichung in eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten

$$y^{(n)} + a_1' y^{(n-1)} + \cdots + a_n' y = 0 \tag{22}$$

und diese durch (21$^a$) in eine Differentialgleichung der Gestalt (15) übergeht. Die *charakteristische Gleichung* der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten (22) ist identisch mit der zu $x = 0$ gehörigen *determinierenden Gleichung* von (15), da ihre Wurzeln übereinstimmen.

Diese Ergebnisse sind leicht direkt zu verificieren.

## Kapitel VIII.

### Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen bei einer Stelle der Bestimmtheit.

**55. Aufstellung der zu behandelnden Aufgaben.** Im vorigen Kapitel hat uns die Fuchs'sche Methode gelehrt, dass bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit $x=0$ die Integrale die Gestalt ganzer Functionen von $\log x$ haben, welche sich bei $x=0$ bestimmt verhalten. Wir fanden ein in Gruppen derart eingeteiltes Fundamentalsystem von Integralen, dass die Elemente einer Gruppe beziehentlich zu den einzelnen Wurzeln einer Wurzelgruppe der determinierenden Gleichung gehörten.

So wichtig und interessant diese Ergebnisse sind, lassen sie doch noch nach einigen Richtungen hin eine Ergänzung wünschen. Zunächst muss bemerkt werden, dass die praktische Durchführung jenes Verfahrens zur Herstellung der logarithmenbehafteten Integrale sich im Allgemeinen äusserst umständlich gestalten wird, weil es dabei gilt, unendliche Reihen mit einander zu multiplicieren, dann wieder zu integrieren u. s. w. Einen zweiten Punkt haben wir schon am Schluss der allgemeinen Untersuchung des vorigen Kapitels (Art. 53) berührt: Wir wünschen ein Fundamentalsystem, in dessen Elementen der Logarithmus nur bis zu einer möglichst niedrigen Potenz aufsteigt. Ein solches muss zwar in dem im vorigen Kapitel aufgestellten Fundamentalsystem enthalten sein. Allein bei der Art, wie die willkürlichen Constanten der einzelnen Elemente desselben in diese eingehen, dürfte es sehr schwierig sein, unmittelbar aus jenem das einfachste Fundamentalsystem zu entwickeln. Hiermit hängt endlich noch zusammen, dass wir die Umlaufsrelationen der Integrale des vorigen Kapitels nur in unvollkommener Weise angeben konnten: wir kennen ja nicht die Werte der in ihnen auftretenden Coefficienten $\omega_{\alpha\beta}$ (s. Formel (12) Artikel 51). Die vollständige Beherrschung der Umlaufsrelationen ist aber für das Studium der Integrale bei den singulären Punkten von grundlegender Bedeutung.

Um diesen verschiedenen Wünschen gerecht zu werden, nehmen

wir die Untersuchung noch einmal auf, indem wir von dem gesamten Inhalt des vorangehenden Kapitels lediglich den die allgemeine analytische Gestalt der Integrale bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit feststellenden Teil, d. h. den Inhalt der Artikel 46—48 benutzen und das zu behandelnde Problem folgendermassen fassen:

*Man versucht der Differentialgleichung*

$$(1)\qquad \begin{aligned} P(x, y) &\equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y \\ &\equiv x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{P}_n y = 0, \end{aligned}$$

— *wo die* $\mathfrak{P}$ *gewöhnliche Potenzreihen von* $x$ *sind,* $\mathfrak{P}_0(0) \gtrless 0$, — *die also bei* $x = 0$ *eine Stelle der Bestimmtheit hat, durch ein Integral der Gestalt*

$$(2)\qquad y = \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1}\psi_{\sigma-1}\log x + \binom{\sigma}{2}\psi_{\sigma-2}\log^2 x + \cdots + \psi_0 \log^\sigma x$$

*zu genügen, in welchem*

$$\psi_0 = \sum_{(s)} c_s x^s, \quad \psi_1 = \sum_{(s)} c_s' x^s, \ldots, \psi_\sigma = \sum_{(s)} c_s^{(\sigma)} x^s$$
$$(s = \alpha, \alpha + 1, \ldots)$$

*nach Potenzen von* $x$ *fortschreitende Reihen sind, deren Exponenten sich sämtlich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, und fragt: wie sind die Coefficienten dieser Reihen und die Zahl* $\alpha$ *zu bestimmen, damit Gleichung* (1) *durch* (2) *identisch erfüllt wird? Convergieren die so bestimmten Reihen* $\psi$ *und welche Coefficienten bleiben in ihnen willkürlich?*

Man erkennt, dass diese Fassung des Problems sich genau an diejenige anschliesst, welche unserer Untersuchung in Kap. I, II, III zu Grunde lag, und für $\sigma = 0$ geradezu in jene übergeht. Nennen wir noch zur Abkürzung ein Integral, in welchem der Logarithmus thatsächlich bis zur $\sigma^{\text{ten}}$ Potenz aufsteigt, ein *Integral* $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ *Stufe*, so können wir auch sagen: wie wir dort das allgemeinste Integral erster Stufe einer Gruppe aufgestellt haben, wollen wir nunmehr *das allgemeinste Integral* $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ *Stufe einer Gruppe* aufstellen.

**56. Allgemeiner Satz über die Herleitung mehrerer logarithmenbehafteter Integrale aus einem solchen.** Wir stellen zunächst einen allgemeinen Satz voran, der sich auf Integrale der hier auftretenden Form — ganze Functionen von $\log x$ — anwenden lässt[1]).

1) Der Satz und diese Anwendung desselben rührt von Koehler her; vergl. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 33. (1888.) S. 231 ff. — Ein Gegenstück zu dem obigen ist der folgende, ebenso leicht zu beweisende und ähnlicher Anwendungen fähige Satz:

*Wenn die Differentialgleichung*

(3) $$Q(x, y) \equiv q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \cdots + q_n y = 0,$$

*deren Coefficienten beliebige Functionen von $x$, aber von einer andern Grösse $u$ unabhängig sind, ein Integral der Gestalt*

$$y = f(x, u)$$

*besitzt, wo $f$ eine beliebige Function von $x$ und $u$ ist, die auch nach $u$ differenziert werden kann, so genügen ihr auch die Functionen*

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial u^2}, \ldots.$$

Ist nämlich

$$Q(x, f(x, u)) = 0,$$

so ist auch

$$\frac{\partial^\lambda Q(x, f(x, u))}{\partial u^\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Da aber die Coefficienten von $Q(x, y)$ von $u$ unabhängig sein sollten, ist

$$\frac{\partial^\lambda Q(x, f(x, u))}{\partial u^\lambda} = Q\left(x, \frac{\partial^\lambda f(x, u)}{\partial u^\lambda}\right)$$

und daher

$$Q\left(x, \frac{\partial^\lambda f(x, u)}{\partial u^\lambda}\right) = 0.$$

Sind nun die Coefficienten von (3) *eindeutige* Functionen von $x$ und besitzt die Gleichung ein Integral

$$y = F(x, \log x),$$

wo $F$ eine ganze rationale Function von $\log x$ ist, deren Coefficienten, abgesehen von einem allen gemeinsamen Faktor $x^r$, eindeutig sind, so wird die Gleichung auch durch

$$y = F(x, \log x + u)$$

befriedigt, wenn $u$ eine ganz beliebige unbestimmte Grösse bedeutet.[1])

Setzt man nämlich $F(x, \log x)$ für $y$ in den Differentialausdruck

---

*Wenn die Differentialgleichung*

$$P(x, u; y) = p_0(x, u) y^{(n)} + p_1(x, u) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x, u) y = 0,$$

*deren Coefficienten beliebige Functionen von $x$ und $u$ sind, die nach $u$ differenziert werden können, ein von $u$ unabhängiges Integral*

$$y = f(x)$$

*besitzt, so genügt dieses auch allen durch partielle Differentiation der Coefficienten nach $u$ aus $P = 0$ hervorgehenden Differentialgleichungen.*

1) Vergl. Koehler, Über die Integration vermittelst expliciter Functionen derjenigen hom. lin. Diffgl. u. s. w., In.-Diss., Heidelberg, 1879. S. 8.

$Q(x, y)$ ein, so erhält man eine ganze rationale Function von $\log x$, deren identisches Verschwinden dasjenige der einzelnen Coefficienten der Potenzen von $\log x$ erfordert[1]). Setzt man aber $F(x, \log x + u)$ für $y$ in $Q(x, y)$ ein, so erhält man *dieselbe* ganze Function von $(\log x + u)$, die mithin auch identisch Null ist, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Auf das Integral $F(x, \log x + u)$ kann man daher den vorstehenden Satz anwenden. Differenziert man aber $F(x, \log x + u)$ beliebig oft nach $u$ und setzt dann $u = 0$, so ist offenbar

$$\left(\frac{\partial^\lambda F(x, \log x + u)}{\partial u^\lambda}\right)_{u=0} = \frac{\partial^\lambda F(x, \log x)}{(\partial \log x)^\lambda}.$$

Man erhält also aus einem Integral der Gestalt $F(x, \log x)$ sogleich mehrere andere, indem man dasselbe nach $\log x$ partiell differenziert.

Schreiben wir dieses Integral in der Form wie (2)

$$y = \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1}\psi_{\sigma-1}\log x + \binom{\sigma}{2}\psi_{\sigma-2}\log^2 x + \cdots + \psi_0 \log^\sigma x,$$

wo die $\psi$ nach Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen sein mögen, die sich aber nicht notwendig bestimmt zu verhalten brauchen, so ergeben sich daraus nach jenem Satz sofort die $\sigma$ andern Integrale, wobei zur Abkürzung links $\log x = u$ gesetzt ist,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} = \psi_{\sigma-1} + \dbinom{\sigma-1}{1}\psi_{\sigma-2}\log x + \cdots\cdots + \psi_0 \log^{\sigma-1} x \\ \dfrac{1}{\sigma(\sigma-1)}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \psi_{\sigma-2} + \dbinom{\sigma-2}{1}\psi_{\sigma-3}\log x + \cdots + \psi_0 \log^{\sigma-2} x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{\sigma!}\cdot\dfrac{\partial^\sigma y}{\partial u^\sigma} = \psi_0. \end{cases}$$

Wir haben also den Satz:

*Aus einem logarithmenbehafteten Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten ergeben sich durch partielle Differentiation nach dem Logarithmus $\sigma$ andere Integrale, welche bezw. $\sigma^{\text{ter}}$, $(\sigma - 1)^{\text{ter}}$, ... $2^{\text{ter}}$, $1^{\text{ter}}$ Stufe sind. Insbesondere ist also der Coefficient der höchsten Potenz des Logarithmus in einem logarithmenbehafteten Integral selbst ein Integral der Differentialgleichung*[2]).

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 5.

2) Dass aus dem Integral (2) die Integrale (4) abgeleitet werden können, ist auf andere Weise von Jürgens bewiesen worden. Crelles Journ. Bd. 80. (1875). S. 151 ff. — Der letzte Teil des Satzes rührt schon von Fuchs her, Crelles Journ. Bd. 68. (1868). S. 356.

Diesem Satz wollen wir sogleich einige Anwendungen folgen lassen. Unterscheiden sich die Exponenten sämtlicher Potenzen von $x$ in den Reihen $\psi_0\, \psi_1 \ldots \psi_\sigma$ des Integrals $y$ nur um ganze Zahlen von einander, so multiplicieren sich alle diese Reihen bei einem Umlauf von $x$ um $x = 0$ mit derselben Constanten $\omega_1$. Wie im Artikel 51 Formel (11) findet man dann die Umlaufsrelation des Integrals $y$ zunächst in der Gestalt

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\overline{y}}{\omega_1} = \psi_\sigma + 2\pi i \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} + (2\pi i)^2 \binom{\sigma}{2} \psi_{\sigma-2} + \cdots + (2\pi i)^\sigma \psi_0 \\ \qquad + \log x \left[\binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} + 2(2\pi i) \binom{\sigma}{2} \psi_{\sigma-2} + \cdots + \sigma (2\pi i)^{\sigma-1} \psi_0\right] \\ \qquad + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad + \log^\sigma x\, \psi_0 \, . \end{cases}$$

Mit Hülfe des hier abgeleiteten Satzes kann man dieser Formel aber die übersichtlichere Gestalt geben

$$\frac{\overline{y}}{\omega_1} = y + \frac{2\pi i}{1} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{(2\pi i)^2}{2\,!} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \cdots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma\,!} \frac{\partial^\sigma y}{\partial u^\sigma},$$

worin wieder $u = \log x$ zu setzen ist. Also:

*Die Umlaufsrelation eines logarithmenbehafteten Integrals*

$$y = \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \cdots + \psi_0 \log^\sigma x,$$

*dessen Reihen $\psi_0\, \psi_1 \ldots \psi_\sigma$ sich bei dem Umlauf sämtlich mit derselben Constanten $\omega_1$ multiplicieren, lautet*

$$(6)\quad \frac{\overline{y}}{\omega_1} = y + \frac{2\pi i}{1} \frac{\partial y}{\partial \log x} + \frac{(2\pi i)^2}{2\,!} \frac{\partial^2 y}{(\partial \log x)^2} + \cdots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma\,!} \frac{\partial^\sigma y}{(\partial \log x)^\sigma}\,.$$

Verhält sich das Integral $y$, dessen Reihen $\psi$ nur um ganze Zahlen von einander verschiedene Exponenten enthalten, insbesondere bei $x = 0$ bestimmt, sodass also jede der Reihen $\psi_0\, \psi_1 \ldots \psi_\sigma$ zu einem bestimmten Exponenten gehört, so kann man stets erreichen, dass die *reellen Teile der Anfangsexponenten von $\psi_\sigma, \psi_{\sigma-1}, \ldots, \psi_1, \psi_0$ in dieser Folge nie abnehmen.* Zu dem Ende braucht man nämlich nur zu dem Integral $y$ die mit geeigneten Constanten multiplicierten Integrale

$$\frac{\partial y}{\partial \log x}, \quad \frac{\partial^2 y}{(\partial \log x)^2}, \ldots, \quad \frac{\partial^\sigma y}{(\partial \log x)^\sigma}$$

zu addieren. Diese häufig zu verwertende Bemerkung kann z. B. auch für das noch weiter gehende Studium der Form der Integrale des vorigen Kapitels im Anschluss an Artikel 49 verwandt werden.

**57. Substitution des logarithmenbehafteten Integrals in die Differentialgleichung.** Um nun die in Artikel 55 geforderte Berechnung der Reihen

$$\psi_0\ \psi_1 \ldots \psi_\sigma$$

des logarithmenbehafteten Integrals $y$ auszuführen, werden wir dieses in die Differentialgleichung (1) substituieren und dadurch für jede dieser Reihen eine Recursionsformel finden. Da wir aber nach Art. 56 aus dem allgemeinsten Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe

$$y = \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \cdots + \psi_0 \log^\sigma x$$

ein Integral $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial y}{\partial \log x} = \psi_{\sigma-1} + \binom{\sigma-1}{1} \psi_{\sigma-2} \log x + \cdots + \psi_0 \log^{\sigma-1} x$$

ableiten können, welches in dieselbe Gruppe wie $y$ gehört und daher in dem allgemeinsten Integral $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe enthalten sein, d. h. aus diesem jedenfalls durch Specialisierung seiner willkürlichen Constanten hervorgehen muss, so wollen wir annehmen, dass wir das allgemeinste Integral $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe bereits kennen, wenn wir uns an die Aufstellung des allgemeinsten Integrals $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe begeben. Diese Annahme führt also schliesslich auf das allgemeinste Integral erster Stufe zurück, welches wir ja in der That in Kap. I, II, III schon ermittelt haben. Hiernach haben wir also nur noch die Reihe $\psi_\sigma$ zu berechnen und festzustellen, welche Beschränkungen den willkürlichen Constanten des allgemeinsten Integrals $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe aufzuerlegen sind, damit es die partielle Ableitung nach $\log x$ von dem allgemeinsten Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe wird.

Substituiert man nun $y$ in (1), so folgt

$$(7)\quad P(x, y) = P(x, \psi_\sigma) + \binom{\sigma}{1} P(x, \psi_{\sigma-1} \log x) + \cdots + P(x, \psi_0 \log^\sigma x)$$

soll identisch Null sein. Hierzu ist notwendig, dass, wenn (7) nach Potenzen von $\log x$ geordnet wird, die einzelnen Coefficienten der Potenzen von $\log x$ für sich identisch verschwinden.[1]) Da aber die Reihe $\psi_\sigma$ in den mit Potenzen von $\log x$ multiplicierten Teilen des Ausdrucks (7) gar nicht vorkommt, so braucht man nur den logarithmenfreien Teil aufzusuchen und gleich Null zu setzen.

Bezeichnet man hierzu für den Augenblick den logarithmenfreien Teil eines von $x$ und $\log x$ abhängigen Ausdrucks $f(x, \log x)$ durch

$$|f(x, \log x)|,$$

so ist

1) Vergl. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 5.

(8) $[P(x,y)] = [P(x,\psi_\sigma)] + \binom{\sigma}{1}[P(x,\psi_{\sigma-1}\log x)] + \cdots + [P(x,\psi_0 \log^\sigma x)]$.

Da aber nach (1)

$$[P(x,v)] = x^n \mathfrak{P}_0 [v^{(n)}] + x^{n-1}\mathfrak{P}_1 [v^{(n-1)}] + \cdots + \mathfrak{P}_n [v],$$

so hat man zur Berechnung der einzelnen Teile von (8) zunächst die logarithmenfreien Teile von

$$\psi_\sigma, \quad \psi_{\sigma-1}\log x, \ldots, \psi_0 \log^\sigma x$$

und ihren $n$ ersten Ableitungen zu ermitteln.

$\psi_\sigma$ und alle seine Ableitungen enthalten überhaupt keine Logarithmen; also ist

(9) $$[\psi_\sigma] = \psi_\sigma, \quad [\psi_\sigma'] = \psi_\sigma', \ldots, [\psi_\sigma^{(n)}] = \psi_\sigma^{(n)}$$

und

$$[P(x,\psi_\sigma)] = P(x,\psi_\sigma).$$

Für $\psi_{\sigma-1}\log x$ und seine $n$ ersten Ableitungen erhält man bezw. die logarithmenfreien Teile

(10) $$\begin{cases} [\psi_{\sigma-1}\log x] = 0 \\ [(\psi_{\sigma-1}\log x)'] = \dfrac{\psi_{\sigma-1}}{x} \\ [(\psi_{\sigma-1}\log x)''] = -\dfrac{\psi_{\sigma-1}}{x^2} + \dfrac{2}{x}\psi_{\sigma-1}' \\ [(\psi_{\sigma-1}\log x)'''] = \dfrac{2}{x^3}\psi_{\sigma-1} - \dfrac{3}{x^2}\psi_{\sigma-1}' + \dfrac{3}{x}\psi_{\sigma-1}'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [(\psi_{\sigma-1}\log x)^{(n)}] = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}\psi_{\sigma-1} \\ \qquad + (-1)^{n-2}\dbinom{n}{1}\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}\psi_{\sigma-1}' + \cdots + \dfrac{n}{x}\psi_{\sigma-1}^{(n-1)}. \end{cases}$$

Hieraus findet man die entsprechende Tabelle für

$$\psi_{\sigma-2}\log^2 x,$$

indem man allenthalben $\psi_{\sigma-1}$ durch $\psi_{\sigma-2}\log x$ ersetzt und dann wieder alle logarithmenbehafteten Glieder fortlässt, also geradeso, wie man von der Tabelle (9) für $\psi_\sigma$ zu der Tabelle (10) für $\psi_{\sigma-1}\log x$ überging. U. s. w.

$[P(x,\psi_{\sigma-1}\log x)]$ ist also ein nach (10) leicht zu bildender linearer homogener Differentialausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen der unabhängigen Variablen $x$ und der abhängigen $\psi_{\sigma-1}$, $[P(x,\psi_{\sigma-2}\log^2 x)]$ ein ebensolcher $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen $x$ und $\psi_{\sigma-2}$, u. s. w. Bezeichnen wir diese Differentialausdrücke bezw. durch

$$P_1(x,\psi_{\sigma-1}), \quad P_2(x,\psi_{\sigma-2}), \ldots, P_\sigma(x,\psi_0),$$

so ist also nach (8) die Reihe $\psi_\sigma$ derart zu bestimmen, dass für jeden Wert von $x$

$$(11) \qquad P(x, \psi_\sigma) + \binom{\sigma}{1} P_1(x, \psi_{\sigma-1}) + \cdots + P_\sigma(x, \psi_0) \equiv 0$$

wird. Gleichung (11) können wir aber als eine lineare nicht homogene Differentialgleichung für die zu berechnende Reihe $\psi_\sigma$ ansehen und daher als Resultat dieses Artikels aussprechen:

*Die Reihe $\psi_\sigma$ in dem Integrale* (2) *der Differentialgleichung* (1) *genügt der nicht homogenen linearen Gleichung*

$$(12) \qquad P(x, v) + \binom{\sigma}{1} P_1(x, \psi_{\sigma-1}) + \cdots + P_\sigma(x, \psi_0) = 0\ ^{1)},$$

*wo $P_1, P_2, \ldots, P_\sigma$ mit Hülfe der Tabellen* (10) *u. s. w. zu bildende Ausdrücke sind, in denen nur gegebene Grössen und die als bekannt vorausgesetzten Reihen $\psi_0 \ldots \psi_{\sigma-1}$ nebst ihren Ableitungen auftreten.*

**58. Convergenz der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen.** Von dem vorangehenden Resultat machen wir sogleich Gebrauch, um die Convergenz der Reihe $\psi_\sigma$ festzustellen. Dies ist in der That erforderlich, weil wir ja hier das Integral (2) ganz unabhängig von den im vorigen Kapitel definierten Integralen aufstellen.

Bei diesem Convergenzbeweis setzen wir die Convergenz der Reihen $\psi_{\sigma-1}, \psi_{\sigma-2}, \ldots, \psi_0$ in der ganzen Umgebung $U$ des Punktes $x = 0$ als bereits feststehend voraus. Und das ist wieder deshalb berechtigt, weil ja (nach Artikel 56) $\psi_0$ ein Integral erster Stufe ist, dessen Convergenz innerhalb $U$ im Kapitel III in der That bewiesen wurde.

Da (12) eine nicht homogene Differentialgleichung für $\psi_\sigma$ ist, übersehen wir schon jetzt, — und wir werden es später ausführlich feststellen, — dass die Recursionsformel für die Coefficienten der Reihe $\psi_\sigma$ *nicht homogene* lineare Gleichungen liefern muss, während wir bei den Integralen erster Stufe in Kap. I, II, III *homogene* Gleichungen hatten. Infolgedessen kann jetzt der Fall eintreten, — der damals aus dem gedachten Grunde ausgeschlossen war, — dass diese Gleichungen unendlich grosse Werte für die Coefficienten der Reihe $\psi_\sigma$ liefern, wenn nicht gewisse Bedingungen erfüllt sind. Diese Bedingungen sind natürlich einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen und werden sich dabei als die schon im Artikel 57 erwähnten Beschränkungen der willkürlichen Constanten in den Reihen $\psi_0\, \psi_1 \ldots \psi_{\sigma-1}$

1) Vgl. Fabry, Sur les intégrales des équations différentielles etc., Thèse, Paris, 1885. S. 47.

des allgemeinsten Integrals $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe herausstellen. Nehmen wir jetzt an, dass sie erfüllt seien, dass wir also bei Berechnung der Coefficienten von $\psi_\sigma$ gemäss (11) endliche Werte erhalten, so lässt sich auch die Convergenz von $\psi_\sigma$ folgendermassen darthun.

Setzen wir den ganzen Ausdruck

$$(13)\qquad \binom{\sigma}{1} P_1(x, \psi_{\sigma-1}) + \binom{\sigma}{2} P_2(x, \psi_{\sigma-2}) + \cdots + P_\sigma(x, \psi_0) = p(x),$$

sodass (12) die Form

$$(12^a)\qquad P(x, v) + p(x) = 0$$

annimmt, so wissen wir aus Artikel 31, dass eine Function $v$, welche der Gleichung ($12^a$) genügt, auch der homogenen Gleichung

$$(14)\qquad \frac{dP}{dx} p - P \frac{dp}{dx} = 0$$

genügen muss. Die letztere lautet aber ausführlich geschrieben

$$(14^a)\qquad \begin{aligned} v^{(n+1)} p p_0 + {} & v^{(n)} (p p_0' + p p_1 - p_0 p') \\ & + v^{(n-1)} (p p_1' + p p_2 - p_1 p') \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + v (p p_n' - p_n p') = 0 . \end{aligned}$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch $p$, so kommt diese Function $p$ nur noch in dem Quotienten $\frac{p'}{p}$ vor, der eine innerhalb $U$ convergente, zu einem Exponenten $> -1$ gehörige Reihe ist. Mit Hülfe dieser Bemerkung erkennt man dann ohne Weiteres, dass die homogene Differentialgleichung (14) oder ($14^a$) bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat, sodass jede ihr formal genügende Reihe in der Umgebung $U$ von $x = 0$ auch convergiert. Eine solche Reihe ist aber $\psi_\sigma$; denn wenn die Coefficienten von $\psi_\sigma$ so beschaffen sind, dass

$$P(x, \psi_\sigma) + p(x) = 0,$$

so ist ja auch

$$\frac{dP(x, \psi_\sigma)}{dx} p - P(x, \psi_\sigma) \frac{dp}{dx} = 0.$$

Damit ist gezeigt:

*Ergiebt die Berechnung der Reihe $\psi_\sigma$ gemäss der Identität* (11) *endliche Werte der Coefficienten, so convergiert die Reihe in der ganzen Umgebung $U$ des Punktes $x = 0$.*

Es mag noch bemerkt werden, dass nur für diesen Convergenzbeweis die Beschränkung auf eine Stelle der Bestimmtheit erforderlich war. Im Übrigen kann die gegenwärtige Untersuchung, gerade wie die von Kap. I und II, für jede nicht wesentlich singuläre Stelle $x = 0$ angestellt werden.

**59. Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen.** Zur wirklichen Berechnung der Reihe $\psi_\sigma$, d. h. ihrer Coefficienten, setzen wir in (11) für die $\psi$ die schon in Artikel 55 angegebenen expliciten Ausdrücke ein

$$\psi_0 = \sum_{(s)} c_s x^s, \quad \psi_1 = \sum_{(s)} c_s' x^s, \ldots, \psi_\sigma = \sum_{(s)} c_s^{(\sigma)} x^s,$$

wo der Summationsbuchstabe $s$, mit einem noch zu bestimmenden Wert $\alpha$ anfangend, die Werte

$$s = \alpha, \quad \alpha + 1, \quad \alpha + 2, \ldots$$

durchläuft und dabei mindestens einer der Coefficienten

$$c_\alpha, \quad c_\alpha', \ldots, c_\alpha^{(\sigma)}$$

von Null verschieden sein soll, sodass das Integral (2) thatsächlich zu dem an irgend einer Stelle stehenden Exponenten $\alpha$ gehört. In dem Resultat dieser Substitution müssen wir dann den Coefficienten einer unbestimmten Potenz von $x$ gleich Null setzen, um die Recursionsformel zu finden.

Wir wählen hierfür wie im Artikel 6 die Potenz

$$x^k,$$

wo $k$ um eine unbestimmte ganze Zahl grösser als $\alpha$ ist. Infolgedessen wird der aus

$$P(x, \psi_\sigma)$$

herrührende Teil dieses Coefficienten identisch mit $F_{k\alpha}$ im Artikel 6, wenn man nur die $c$ durch die $c^{(\sigma)}$ ersetzt, also mit

$$a_{k\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} + a_{k,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma)} + \cdots + a_{kk} c_k^{(\sigma)},$$

wofür wir zur Abkürzung gelegentlich schreiben

$$F_{k\alpha}^{0\sigma}.$$

(Für $\sigma = 0$ ist $F_{k\alpha}^{0\sigma} = F_{k\alpha}$ zu verstehen.)

Bei der Ermittlung des aus $P_1(x, \psi_{\sigma-1})$ herrührenden Teils des Coefficienten von $x^k$ in (11) bemerken wir durch Vergleichen der Tabellen (9) und (10), dass dieser aus $P(x, y)$ gerade so gefunden wird, wie der von $P(x, \psi_\sigma)$ herrührende Teil, wenn man nur

$$\begin{array}{llll} \text{für } y & \text{statt} & \psi_\sigma & : 0 \\ \text{d. h.} & ,, & \sum c_s^{(\sigma)} x^s & : 0, \\ \text{für } y' & \text{statt} & \psi_\sigma' & : \dfrac{\psi_{\sigma-1}}{x} \\ \text{d. h.} & ,, & \sum s c_s^{(\sigma)} x^{s-1} & : \sum c_s^{(\sigma-1)} x^{s-1}, \end{array}$$

für $y''$ statt $\psi''_\sigma$ : $-\frac{\psi_{\sigma-1}}{x^2} + \frac{2}{x}\psi'_{\sigma-1}$

d. h. „ $\sum s(s-1)\, c_s^{(\sigma)} x^{s-2}$ : $\sum (2s-1)\, c_s^{(\sigma-1)} x^{s-2}$

für $y'''$ statt $\psi'''_\sigma$ : $\frac{2}{x^3}\psi_{\sigma-1} - \frac{3}{x^2}\psi'_{\sigma-1} + \frac{3}{x}\psi''_{\sigma-1}$

d. h. „ $\sum s(s-1)(s-2)\, c_s^{(\sigma)} x^{s-3}$ : $\sum (3s^2-6s+2)\, c_s^{(\sigma-1)} x^{s-3}$

u. s. w.

einsetzt, allgemein

für $y^{(\lambda)}$ statt $\psi_\sigma^{(\lambda)}$:

$$(-1)^{\lambda-1}\frac{(\lambda-1)!}{x^\lambda}\psi_{\sigma-1} + (-1)^{\lambda-2}\binom{\lambda}{1}\frac{(\lambda-2)!}{x^{\lambda-1}}\psi'_{\sigma-1} + \cdots + \binom{\lambda}{1}\frac{\psi_{\sigma-1}^{(\lambda-1)}}{x},$$

d. h. statt $\sum s(s-1)\ldots(s-\lambda+1)\, c_s^{(\sigma)} x^{s-\lambda}$:

$$\begin{aligned}\sum c_s^{(\sigma-1)} x^{s-\lambda} \Big\{ & \lambda\, s(s-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(s-\lambda+2) \\ & - \binom{\lambda}{2} 1!\, s(s-1)\ldots\ldots(s-\lambda+3) \\ & + \binom{\lambda}{3} 2!\, s(s-1)\ldots(s-\lambda+4) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{\lambda-2}\binom{\lambda}{1}(\lambda-2)!\, s \\ & + (-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)! \Big\}.\end{aligned}$$

Nun sieht man aus dieser Zusammenstellung, dass unter dem Summenzeichen die gleiche Potenz von $x$ rechts immer mit einem $c$ mit demselben unteren Index wie links, bei dem nur der obere Index $(\sigma)$ durch $(\sigma-1)$ ersetzt wird, multipliciert ist und ausserdem mit einer ganzen Function von $s$, welche die erste Ableitung derjenigen ist, die links mit dem entsprechenden $c$ multipliciert ist. Dies ist in den vier ersten Zeilen der obigen Zusammenstellung evident, und man verificiert leicht, dass auch

$$\begin{aligned}\lambda\, s(s-1)\ldots(s-\lambda+2) - \cdots + (-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)! \\ = \frac{d}{ds}\, s(s-1)\ldots(s-\lambda+1)\end{aligned}$$

ist.

Hieraus folgt aber, dass der aus $P_1(x, \psi_{\sigma-1})$ herrührende Teil der gesuchten Recursionsformel aus dem von $P(x, \psi_\sigma)$ herrührenden Teil entsteht, indem man einfach die $c^{(\sigma)}$ durch die mit gleichem

unteren Index versehenen $c^{(\sigma-1)}$ und die ganzen Functionen von $s$ $a_{ks}$ durch ihre ersten Ableitungen nach $s$,

$$a'_{ks} = \frac{d a_{ks}}{ds},$$

ersetzt. Der aus $\binom{\sigma}{1} P_1(x, \psi_{\sigma-1})$ herrührende Teil der Recursionsformel ist daher

$$\binom{\sigma}{1} F_{k\alpha}^{1,\sigma-1} = \binom{\sigma}{1} [a'_{k\alpha} c_\alpha^{(\sigma-1)} + a'_{k,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma-1)} + \cdots + a'_{kk} c_k^{(\sigma-1)}].$$

Da wir nun im Anschluss an Tabelle (10) bereits bemerkten, dass $P_2(x, \psi_{\sigma-2})$ aus $P_1(x, \psi_{\sigma-1})$ geradeso hervorgeht wie $P_1(x, \psi_{\sigma-1})$ aus $P(x, \psi_\sigma)$, u. s. w., so folgt, dass der aus $\binom{\sigma}{2} P_2(x, \psi_{\sigma-2})$ herrührende Teil des Coefficienten von $x^k$ in (11)

$$\binom{\sigma}{2} F_{k\alpha}^{2,\sigma-2} = \binom{\sigma}{2} \left[ a''_{k\alpha} c_\alpha^{(\sigma-2)} + a''_{k,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma-2)} + \cdots + a''_{kk} c_k^{(\sigma-2)} \right]$$

wird, wenn

$$a''_{ks} = \frac{d^2 a_{ks}}{ds^2}$$

ist. Bilden wir so schliesslich den vollständigen Ausdruck des Coefficienten von $x^k$ in (11) und setzen denselben gleich Null, so erhalten wir als Recursionsformel für die Coefficienten $c^{(\sigma)}$ der Reihe $\psi_\sigma$ die Formel

$$(15) \qquad \begin{aligned} & F_{k\alpha}^{0,\sigma} + \binom{\sigma}{1} F_{k\alpha}^{1,\sigma-1} + \binom{\sigma}{2} F_{k\alpha}^{2,\sigma-2} + \cdots + F_{k\alpha}^{\sigma,0} \\ = {} & a_{k\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} + a_{k,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma)} + \cdots + a_{kk} c_k^{(\sigma)} \\ & + \binom{\sigma}{1} [a'_{k\alpha} c_\alpha^{(\sigma-1)} + a'_{k,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma-1)} + \cdots + a'_{kk} c_k^{(\sigma-1)}] \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + a_{k\alpha}^{(\sigma)} c_\alpha + a_{k,\alpha+1}^{(\sigma)} c_{\alpha+1} + \cdots + a_{kk}^{(\sigma)} c_k = 0 \end{aligned}$$

oder kurz geschrieben

$$(15^a) \qquad F_{k\alpha}^{(\sigma)} = 0,$$

wenn

$$a_{ks}^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda a_{ks}}{ds^\lambda}.$$

Da aber $s$ nur die Werte

$$s = \alpha, \quad \alpha + 1, \quad \alpha + 2, \ldots$$

annimmt, kann man auch schreiben

$$a_{ks}^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda a_{ks}}{ds^\lambda} = \frac{d^\lambda a_{ks}}{d\alpha^\lambda},$$

was den Vorteil bietet, dass alle $a_{ks}^{(\lambda)}$ $(s = \alpha, \alpha + 1, \ldots)$ nunmehr als Ableitungen nach ein und derselben Grösse erscheinen. Fasst man dann symbolisch auch $c_s^{(\lambda)}$ als $\lambda^{\text{te}}$ Ableitung von $c_s$ nach $\alpha$ auf, so erscheint der ganze Ausdruck $F_{k\alpha}^{\prime(\sigma)}$ symbolisch als der $\sigma^{\text{te}}$ Differentialquotient von $F_{k\alpha}$ nach $\alpha$.

Da nun nach Art. 56 aus dem Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe $y$ Integrale $\sigma^{\text{ter}}$, $(\sigma - 1)^{\text{ter}}, \ldots, 2^{\text{ter}}$, $1^{\text{ter}}$ Stufe hervorgehen, in denen bezw. $\psi_{\sigma-1}, \psi_{\sigma-2}, \ldots, \psi_1, \psi_0$ den logarithmenfreien Teil bilden, so besitzen wir mit (15) gleichzeitig die Recursionsformeln der vorher als schon bekannt vorausgesetzten übrigen Reihen in dem Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe und können daher das Resultat aussprechen:

*Die Reihen $\psi_\lambda$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, \sigma)$ eines zu $\alpha$ gehörigen Integrals $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe*

$$y = \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \cdots + \psi_0 \log^\sigma x$$
$$= \sum c_s^{(\sigma)} x^s + \binom{\sigma}{1} \log x \sum c_s^{(\sigma-1)} x^s + \cdots + \log^\sigma x \sum c_s x^s$$

*folgen bezw. den Recursionsformeln*

$$F_{k\alpha}^{\prime(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, \sigma),$$

wo

$$F_{k\alpha}^{\prime(0)} = F_{k\alpha} = a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k,\alpha+1} c_{\alpha+1} + \cdots + a_{kk} c_k$$

*der in Artikel 6 gebildete Ausdruck ist und*

$$F_{k\alpha}^{\prime(\lambda)}$$

*aus $F_{k\alpha}$ durch eine, in Bezug auf die $c$ nur symbolische, durch Accente angedeutete $\lambda$-fache Differentiation nach $\alpha$ hervorgeht.*

**60. Zugehörigkeit logarithmenbehafteter Integrale zu den Wurzeln der determinierenden Gleichung.** Bildet man die Recursionsformel (15) für $k = \alpha$, so reduciert sich dieselbe auf

$$(16) \qquad a_{\alpha\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} + \binom{\sigma}{1} a'_{\alpha\alpha} c_\alpha^{(\sigma-1)} + \cdots + a_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} c_\alpha = 0,$$

wo $a_{\alpha\alpha}$ die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function, $a'_{\alpha\alpha}, a''_{\alpha\alpha}, \ldots$ deren successive Ableitungen nach $\alpha$ sind. Das Integral (2) sollte nun zu dem an irgend einer Stelle stehenden Exponenten $\alpha$ wirklich gehören. Steht dieser an erster Stelle, so sind also

$$c_\alpha^{(\sigma)} \neq 0, \quad c_\alpha^{(\sigma-1)} = c_\alpha^{(\sigma-2)} = \cdots = c_\alpha = 0;$$

folglich muss dann nach (16) $a_{\alpha\alpha} = 0$ sein, d. h. der Exponent $\alpha$ muss eine Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung sein.

Gehört das Integral (2) dagegen zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\alpha$, so ist

$$(17)\qquad c_\alpha^{(\sigma-\gamma+1)} \neq 0, \quad c^{(\sigma-\gamma)} = c_\alpha^{(\sigma-\gamma-1)} = \cdots = c_\alpha = 0.$$

Bildet man also in diesem Fall das durch $(\gamma-1)$-fache Differentiation nach $u = \log x$ aus $y$ hervorgehende Integral

$$\frac{1}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-\gamma+2)}\frac{\partial^{\gamma-1} y}{\partial u^{\gamma-1}}$$
$$= \psi_{\sigma-\gamma+1} + \binom{\sigma-\gamma+1}{1}\psi_{\sigma-\gamma}\log x + \cdots + \psi_0 \log^{\sigma-\gamma+1} x,$$

so gehört dies wieder zu dem an erster Stelle stehenden Exponenten $\alpha$. Die der Gleichung (16) entsprechende Gleichung lautet

$$(16^{\text{a}})\qquad a_{\alpha\alpha}c_\alpha^{(\sigma-\gamma+1)} + \binom{\sigma-\gamma+1}{1}a'_{\alpha\alpha}c_\alpha^{(\sigma-\gamma)} + \cdots + a_{\alpha\alpha}^{(\sigma-\gamma+1)}c_\alpha = 0$$

und erfordert in Rücksicht auf (17) abermals das Verschwinden von $a_{\alpha\alpha}$. Bildet man alsdann das durch $(\gamma-2)$-fache Differentiation aus $y$ entstehende Integral, so lautet für dieses die den Gleichungen (16) und (16ᵃ) entsprechende Gleichung

$$(16^{\text{b}})\qquad a_{\alpha\alpha}c_\alpha^{(\sigma-\gamma)} + \binom{\sigma-\gamma}{1}a'_{\alpha\alpha}c_\alpha^{(\sigma-\gamma-1)} + \cdots + a_{\alpha\alpha}^{(\sigma-\gamma)}c_\alpha = 0,$$

welche in Rücksicht auf (17) und das aus (16ᵃ) gezogene Resultat das Verschwinden von $a'_{\alpha\alpha}$ erfordert. So weiterschliessend erkennt man, dass, wenn $y$ zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\alpha$ gehört, die Gleichungen

$$a_{\alpha\alpha} = 0, \quad a'_{\alpha\alpha} = 0, \ldots, a_{\alpha\alpha}^{(\gamma-1)} = 0$$

erfüllt sein müssen, d. h. dass dann $\alpha$ mindestens $\gamma$-fache Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung sein muss.

Wir haben also das Resultat:

*Wenn das Integral*

$$y = \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1}\psi_{\sigma-1}\log x + \cdots + \psi_0 \log^\sigma x$$

*zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\alpha$ gehört, ist $\alpha$ mindestens $\gamma$-fache Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung.*

Dass umgekehrt bei einer Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ zu einer $\gamma$-fachen Wurzel der determinierenden Gleichung $\gamma$ linear unabhängige Integrale gehören, bei denen dieser Exponent bezw. an der 1ten, 2ten, ..., $\gamma^{\text{ten}}$ Stelle steht, wissen wir bereits aus dem vorigen Kapitel (Art. 49).

**61. Berechnung der Reihencoefficienten aus der Recursionsformel.** Wir haben nunmehr zu untersuchen, in welcher Weise sich die Coefficienten $c^{(\sigma)}$ aus der Recursionsformel (15) berechnen, wenn wir die sämtlichen Coefficienten

$$c, \; c', \; c'', \ldots, c^{(\sigma-1)}$$

in dem allgemeinsten Integral $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe wieder als bekannt voraussetzen, insbesondere, ob bezw. unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen sich endliche Werte für dieselben ergeben. Hiermit steht dann nach Art. 58 die Convergenz der Reihe $\psi_\sigma$ fest.

Wir benutzen dabei dieselben Bezeichnungen wie in Kap. II, verstehen aber unter $\alpha$ jetzt gleich die kleinste Wurzel $(r_\lambda)$ der ganzen Gruppe $g$, sodass

$$\alpha (\equiv r_\lambda), \; \beta, \; \gamma, \ldots, \mu, \; \nu (= r_1)$$

die sämtlichen von einander verschiedenen Wurzeln der ganzen Gruppe $g$ sind. Bildet man dann die Recursionsformel (15) für $k = \alpha + 1$, $\alpha + 2, \ldots$ — die für $k = \alpha$ entstehende Gleichung enthält ja infolge des Verschwindens von $a_{\alpha\alpha}$ gar kein $c^{(\sigma)}$ —, so führt von der für $k = \nu + 1$ gebildeten Gleichung an jede ein neues $c^{(\sigma)}$ ein und zwar multipliciert mit einem von Null verschiedenen Coefficienten. Ergiebt also das vorangehende endliche System von $\nu - \alpha$ Gleichungen für

$$c_\alpha^{(\sigma)}, \; c_{\alpha+1}^{(\sigma)}, \ldots, c_{\nu-1}^{(\sigma)}$$

nicht unendlich grosse Werte, so gilt dasselbe von allen nach dem völlig willkürlich bleibenden $c_\nu^{(\sigma)}$ folgenden $c^{(\sigma)}$, wie weit man auch geht. Wir haben also nur die Bedingungen dafür zu suchen, dass jenes System der $\nu - \alpha$ Gleichungen seinen Unbekannten keine unendlich grossen Werte erteilt.

Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung

$$h_k = - F'^{0\sigma}_{k\alpha} - F'^{(\sigma)}_{k\alpha} \qquad (k = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots)$$

ein, sodass die $h_k$ linear und homogen in den als bekannt vorausgesetzten Coefficienten von $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\sigma-1}$ sind, so lautet jenes Gleichungssystem

$$(\Sigma) \begin{cases} h_{\alpha+1} = a_{\alpha+1,\,\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} + a_{\alpha+1,\,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma)} \\ h_{\alpha+2} = a_{\alpha+2,\,\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} + a_{\alpha+2,\,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma)} + a_{\alpha+2,\,\alpha+2} c_{\alpha+2}^{(\sigma)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h_{\nu-1} = a_{\nu-1,\,\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} + a_{\nu-1,\,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma)} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + a_{\nu-1,\,\nu-1} c_{\nu-1}^{(\sigma)} \\ \;\; h_\nu = a_{\nu\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} \quad + a_{\nu,\,\alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma)} \quad + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + a_{\nu,\,\nu-1} c_{\nu-1}^{(\sigma)} \end{cases}$$

und unterscheidet sich also von dem System $S$ oder $S_{\alpha\nu}$ im Artikel 12 nur dadurch, dass an Stelle der $c$ die $c^{(\sigma)}$ und an Stelle der Nullen links die $h$ getreten sind. Wie wir aber dort nach den Bedingungen fragten, unter denen nicht alle $c$, insbesondere $c_\alpha$, Null sind, fragen wir jetzt, unter welchen Bedingungen die $c^{(\sigma)}$, und zwar zunächst $c_\alpha^{(\sigma)}$, nicht unendlich grosse Werte erhalten.

Die Determinante des Systems $\Sigma$ oder $\Sigma_{\alpha\nu}$ ist dieselbe wie die von $S$ oder $S_{\alpha\nu}$, nämlich

$$D_{\alpha\nu} = D_{\alpha\beta} \cdot D_{\beta\gamma} \dots D_{\mu\nu}$$

und daher $\neq 0$, wenn alle Determinanten $D_{\alpha\beta}$, $D_{\beta\gamma}, \dots D_{\mu\nu} \neq 0$ sind. In diesem Fall liefert also $\Sigma$ nur endliche Werte der sämtlichen Unbekannten, und wir sind schon am Ziel. Im entgegengesetzten Fall, der also insbesondere dann eintritt, wenn zu einer der Wurzeln $\alpha, \beta, \dots, \mu$ ein Integral erster Stufe gehört, müssen wir noch genauer auf das System eingehen.

Die Coefficienten $c_{\alpha+1}^{(\sigma)}, c_{\alpha+2}^{(\sigma)}, \dots, c_{\beta-1}^{(\sigma)}, c_{\beta+1}^{(\sigma)} \dots, c_{\nu-1}^{(\sigma)}$ können nur dann unendlich werden, wenn einer oder mehrere der Coefficienten

$$c_\alpha^{(\sigma)}, \; c_\beta^{(\sigma)}, \dots, c_\mu^{(\sigma)}$$

unendlich werden; denn jene sind lineare Functionen von diesen und den endlichen Grössen $h$ mit endlichen Coefficienten. Es kommt deshalb für unsere Frage nur auf die Werte dieser letzteren $c^{(\sigma)}$ an. Zu ihrer Berechnung können wir das System $\Sigma$ wieder durch ein anderes ersetzen, welches nur noch die Unbekannten $c_\alpha^{(\sigma)}, c_\beta^{(\sigma)}, \dots, c_\mu^{(\sigma)}$ enthält und für ihre Werte dem System $\Sigma$ äquivalent ist.

Zu dem Ende verfahren wir genau wie im Artikel 13. Für das Teilsystem $\Sigma_{\alpha\beta}$ oder

$$h_{\alpha+1} = F_{\alpha+1,\alpha}^{0\sigma}, \quad h_{\alpha+2} = F_{\alpha+2,\alpha}^{0\sigma}, \dots, h_\beta = F_{\beta\alpha}^{0\sigma}$$

besteht die Identität

$$(18) \qquad d_{\alpha+1,\beta} F_{\alpha+1,\alpha}^{0\sigma} + d_{\alpha+2,\beta} F_{\alpha+2,\alpha}^{0\sigma} + \dots + d_{\beta\beta} F_{\beta\alpha}^{0\sigma} = c_\alpha^{(\sigma)} D_{\alpha\beta},$$

sodass, wenn man noch zur Abkürzung

$$d_{\alpha+1,\beta} h_{\alpha+1} + d_{\alpha+2,\beta} h_{\alpha+2} + \dots + d_{\beta\beta} h_\beta = H_{\alpha\beta}$$

setzt, aus $\Sigma_{\alpha\beta}$ durch Composition der einzelnen Gleichungen mit $d_{\alpha+1,\beta}, d_{\alpha+2,\beta}, \dots, d_{\beta\beta}$ folgt

$$(19) \qquad H_{\alpha\beta} = c_\alpha^{(\sigma)} D_{\alpha\beta}.$$

Da aber $d_{\beta\beta} \neq 0$, folgt auch umgekehrt aus

$$h_{\alpha+1} = F^{0\sigma}_{\alpha+1,\alpha}, \ldots, h_{\beta-1} = F^{0\sigma}_{\beta-1,\alpha} \text{ und } (19)$$

die Gleichung

$$h_\beta = F^{0\sigma}_{\beta\alpha}.$$

*Das Teilsystem $\Sigma_{\alpha\beta}$ ist daher dem System äquivalent, welches aus $\Sigma_{\alpha\beta}$ entsteht, wenn Gleichung $h_\beta = F^{0\sigma}_{\beta\alpha}$ durch* (19) *ersetzt wird.*

Indem man nun in dieser Weise genau wie in Artikel 13 weiterschliesst, gelangt man zu dem Resultat

*Für die Werte der Coefficienten $c_\alpha^{(\sigma)}, c_\beta^{(\sigma)}, \ldots, c_\mu^{(\sigma)}$ ist das System*

$$(20)\quad \begin{cases} H_{\alpha\beta} = c_\alpha^{(\sigma)} D_{\alpha\beta} \\ H_{\alpha\gamma} = c_\alpha^{(\sigma)} D_{\alpha(\beta)\gamma} + c_\beta^{(\sigma)} A_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ H_{\alpha\nu} = c_\alpha^{(\sigma)} D_{\alpha(\beta\ldots\mu)\nu} + c_\beta^{(\sigma)} A_{\alpha\beta} D_{\beta(\gamma\ldots\mu)\nu} + \cdots + c_\mu^{(\sigma)} A_{\alpha\mu} D_{\mu\nu} \end{cases}$$

*allein dem System $\Sigma$ äquivalent.* Dabei sind wie $H_{\alpha\beta}$ auch $H_{\alpha\gamma}, \ldots, H_{\alpha\nu}$ linear und homogen in den $h$, also linear und homogen in den Coefficienten der Reihen $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\sigma-1}$.

Von dem System (20) behalten wir nun die erste Gleichung, die nur noch $c_\alpha^{(\sigma)}$ enthält, (19), zurück und knüpfen an die übrig bleibenden Gleichungen dieselben Betrachtungen wie vorher an die unendliche Reihe von Gleichungen, die die Recursionsformel (15) lieferte: Sind in allen folgenden Gleichungen (20) die letzten Coefficienten, d. h. $D_{\beta\gamma}, D_{\gamma\delta}, \ldots, D_{\mu\nu} \neq 0$, so drücken alle diese Gleichungen nur $c_\beta^{(\sigma)}, c_\gamma^{(\sigma)}, \ldots, c_\mu^{(\sigma)}$ durch $c_\alpha^{(\sigma)}$ und die endlichen Grössen $H$ aus; für den Wert von $c_\alpha^{(\sigma)}$ aber ist dann

$$(19)\qquad H_{\alpha\beta} = c_\alpha^{(\sigma)} D_{\alpha\beta}$$

allein schon dem System $\Sigma$ äquivalent. — Andernfalls sei etwa $D_{\varrho\tau}$ von $D_{\mu\nu}$ aus gerechnet die erste der Determinanten $D_{\mu\nu}, D_{\lambda\mu}, \ldots, D_{\beta\gamma}$, die verschwindet. Dann lässt man die letzten der Gleichungen (20) nach der mit $D_{\varrho\tau}$ endigenden einfach weg, weil sie nur die in ihnen neu auftretenden $c^{(\sigma)}$ durch die vorangehenden und durch die $H$ ausdrücken, und hat danach zwischen den Unbekannten

$$c_\alpha^{(\sigma)}, c_\beta^{(\sigma)}, \ldots, c_\varrho^{(\sigma)}$$

ein Gleichungssystem $\Sigma'$, das dem System $\Sigma$ genau analog gebaut und demselben für die Werte dieser Unbekannten zusammen mit (19) äquivalent ist. Mit $\Sigma'$ verfahren wir nun genau wie vorher mit $\Sigma$, erhalten also eine nur $c_\alpha^{(\sigma)}$ enthaltende Gleichung

$$(19')\qquad H' = c_\alpha^{(\sigma)} D',$$

w. ganz analog wie in Art. 14. So erhalten wir schliesslich *das hungssystem*

$$(21)\quad \begin{cases} H_{\alpha\beta} = c_\alpha^{(\sigma)} D_{\alpha\beta} \\ H' \;\;= c_\alpha^{(\sigma)} D' \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ H^{(m)} = c_\alpha^{(\sigma)} D^{(m)}, \end{cases}$$

*es nur noch $c_\alpha^{(\sigma)}$ enthält, aber für dessen Wert dem System $\Sigma$ aequi- t ist.* Die Grössen $D$ rechts sind in bekannter Weise aus den nnten Grössen $a_{ks}$ zusammengesetzt, die $H$ links sind linear und gen in den Coefficienten $c, c', \ldots, c^{(\sigma-1)}$, welche in den Reihen llgemeinsten Integrals $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe auftreten.

Die Gleichungen (21) ergeben uns nun unmittelbar die notwen- und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $c_\alpha^{(\sigma)}$ nicht unendlich Sobald nämlich in einer dieser Gleichungen der Coefficient $c_\alpha^{(\sigma)}$ rechts Null ist, tritt als Bedingung das Verschwinden der der linken Seite stehenden Grösse $H$ auf. Die gesuchten Be- ngsgleichungen, die wir kurz mit $B_\sigma$ bezeichnen wollen, ergeben daher als lineare homogene Relationen zwischen den Coefficienten Reihen in dem allgemeinsten Integral $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe; es sind also hungen, denen die in dem allgemeinsten Integral $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe ent- nen willkürlichen Constanten genügen müssen.

Die eventuell übrig bleibenden der Gleichungen (21), in denen Coefficient von $c_\alpha^{(\sigma)}$ *nicht* Null ist, zeigen dann gleichzeitig, ob notwendig den Wert Null erhält, oder eine bestimmte lineare gene Function der Coefficienten $c, c', \ldots, c^{(\sigma-1)}$ wird, die nicht jedes Wertsystem der unter diesen willkürlich bleibenden Null — Sind in allen Gleichungen (21) die $D$ rechts Null und die s entspringenden Bedingungsgleichungen $B_\sigma$ sämtlich erfüllbar, ird also durch das ganze System (21) und folglich $\Sigma$ gar nichts $c_\alpha^{(\sigma)}$ ausgesagt, und $c_\alpha^{(\sigma)}$ bleibt somit willkürlich. Das Verschwin- dieser sämtlichen $D$ in den Gleichungen (21) stellt aber nach kel 14 (12) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dass zu $\alpha\,(\equiv r_\lambda)$ ein Integral erster Stufe gehört. Nur in diesem also kann $c_\alpha^{(\sigma)}$ auch dann noch willkürlich bleiben, wenn schon alle willkürlichen Constanten in $\psi_0\,\psi_1 \ldots \psi_{\sigma-1}$ verfügt ist.

Bei dem Übergang von dem ursprünglich vorliegenden System $\Sigma$ en Gleichungen (21) sind allmählig sämtliche $c_{\alpha+1}^{(\sigma)}, c_{\alpha+2}^{(\sigma)}, \ldots, c_{\nu-1}^{(\sigma)}$ fallen, aber auf zweierlei sehr verschiedene Art. Die einen, weil sich zufolge dem System $\Sigma$ oder einem der später auftretenden eme nur durch die vorangehenden $c^{(\sigma)}$ und die $h$, bezw. $H$ aus-

drückten, sodass sie nur unendlich werden können, wenn eines dieser vorangehenden $c^{(\sigma)}$ unendlich würde. Die andern, — wie $c_\nu^{(\sigma)}$ in dem ursprünglichen System, — indem sie in einem der an Stelle von $\Sigma$ tretenden Systeme erst in der letzten Gleichung auftreten könnten, durch Verschwinden ihres Coefficienten thatsächlich aber von selbst aus dem ganzen System ausfallen. *Diese letzteren $c^{(\sigma)}$ bleiben daher völlig willkürlich.* (Dies ist übrigens auch von anderer Seite her einleuchtend: diese $c^{(\sigma)}$ sind ja nach Artikel 15 gerade mit demselben Index behaftet wie diejenigen $c$ dort, welche auch bei den Integralen erster Stufe willkürlich bleiben, also auch als Anfangscoefficienten von reihenförmigen Integralen auftreten. Addiert man aber zu einem beliebigen Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe

$$y = \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \cdots$$

Integrale erster Stufe, die mit willkürlichen Coefficienten anfangen, so hat man immer noch ein Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe, in welchem bei $\psi_\sigma$ eben jene nämlichen Coefficienten willkürlich sind.) Wir sehen also aus dieser Überlegung, dass von den Coefficienten $c_{\alpha+1}^{(\sigma)}, \ldots, c_{\nu-1}^{(\sigma)}$ einige willkürlich bleiben können, alle übrigen sich linear und homogen durch $c_\alpha^{(\sigma)}$, durch jene willkürlichen und durch die $h$ bezw. $H$ ausdrücken, sodass, wenn $c_\alpha^{(\sigma)}$ nicht unendlich wird, auch kein anderes dieser $c^{(\sigma)}$ unendlich wird. Die Bedingungen $B_\sigma$ sind demnach schon die für unsere ganze Frage notwendigen und hinreichenden. Sind dieselben nicht erfüllbar, so giebt es also kein Integral der $(\sigma + 1)^{\text{ten}}$ Stufe in der betrachteten Gruppe.

Die Ergebnisse dieses Artikels fassen wir folgendermassen zusammen.

*Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen $B_\sigma$ dafür, dass die Recursionsformel* (15) *für die Coefficienten der Reihe $\psi_\sigma$ endliche Werte liefert, ergeben sich aus den Gleichungen* (21) *und sind Gleichungen, denen die willkürlichen Constanten des allgemeinsten Integrals $\sigma^{\text{ter}}$ Stufe unterworfen werden müssen. Dann und nur dann, wenn dieselben erfüllbar sind, existiert ein Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe. Die auch nach Verfügung über alle willkürlichen Constanten in $\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_{\sigma-1}$ noch willkürlich bleibenden Coefficienten von $\psi_\sigma$ sind mit denselben Potenzen von $x$ multipliciert wie die willkürlichen Coefficienten eines logarithmenfreien Integrals. Alle anderen Coefficienten von $\psi_\sigma$ sind linear und homogen durch diese willkürlichen und durch die Coefficienten der Reihen $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\sigma-1}$ ausgedrückt. Die so bestimmte Reihe $\psi_\sigma$ ist in der ganzen Umgebung $U$ des Punktes $x = 0$ convergent.*

52. **Das allgemeinste Integral einer Gruppe.** Nunmehr sind wir
esitz aller Mittel, um die allgemeinsten Integrale der einzelnen
n, endlich das allgemeinste Integral der ganzen Gruppe wirklich
stellen.

Es sei jetzt

$$y_0 = \psi_{00} = \sum_{(k)} c_k x^k$$

allgemeinste in die Gruppe $\Gamma$ gehörige Integral erster Stufe,
es man nach Kap. I, II, III ermittelt hat. Die Coefficienten $c_k$
linear und homogen von etwa $\nu_0$ derselben abhängig, die willkür-
bleiben (s. Art. 15), und die wir durch die Zeichen

$$C_{01},\ C_{02}, \ldots, C_{0\nu_0}$$

ders hervorheben wollen. Infolgedessen giebt es genau $\nu_0$ linear
hängige Integrale erster Stufe und nicht mehr. Giebt man näm-
len $\nu_0$ willkürlichen Constanten der Reihe nach die Wertsysteme

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1, \end{array}$$

hält man $\nu_0$ linear unabhängige Reihen, weil sie alle mit ver-
denen Exponenten beginnen. Mehr als $\nu_0$ können aber nicht
eren, weil sonst eine lineare homogene Verbindung derselben mit
ürlichen Coefficienten mehr willkürliche Constanten enthielte als
allgemeinste Integral erster Stufe.

Ist also $\nu_0 = \lambda$, so besitzen wir in (22) bereits das allgemeinste
ral der Gruppe $\Gamma$, weil diese $\lambda$ linear unabhängige Integrale be-
(s. Art. 48). Ist dagegen $\nu_0 < \lambda$, so muss es noch Integrale
er Stufe geben:

$$y_1 = \psi_{11} + \psi_{10} \log x = \sum_{(k)} c'_k x^k + \log x \sum_{(k)} c_k x^k .$$

diese zu berechnen, setzen wir in

$$\begin{aligned} F'_{k\alpha} = {} & a_{k\alpha} c'_\alpha + \cdots + a_{kk} c'_k \\ & + a'_{k\alpha} c_\alpha + \cdots + a'_{kk} c_k = 0 \end{aligned}$$

die $c$ die Coefficienten von $\psi_{00}$ aus (22) ein, erhalten dann die
ngungsgleichungen $B_1$ dafür, dass sich für die $c'$ endliche Werte
ben und beschränken diesen Gleichungen gemäss die willkürlichen
tanten $C_{01}, \ldots, C_{0\nu_0}$ von $\psi_{00}$ — was sicher möglich ist, ohne dass

alle $C_0 = 0$ gesetzt werden, da es Integrale $2^{\text{ter}}$ Stufe giebt. Es mögen darnach von jenen $\nu_0$ willkürlichen Constanten in $\psi_{00}$ noch $\nu_1$ $(0 < \nu_1 < \nu_0)$ willkürlich bleiben, die wir mit

$$C_{11}\ C_{12} \ldots C_{1\nu_1}$$

bezeichnen. So entsteht aus $\psi_{00}$ die in (23) schon mit $\psi_{10}$ bezeichnete Reihe, in welcher sämtliche Coefficienten $c_k$ linear und homogen von den $\nu_1$ willkürlichen Coefficienten $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ abhängen. In der Reihe $\psi_{11}$ aber bleiben nach dem vorigen Artikel die und nur die Coefficienten willkürlich, welche zugleich als Anfangscoefficienten in Integralen erster Stufe dienen können, und die wir deshalb wieder mit denselben Zeichen $C_{01} \ldots C_{0\nu_0}$ belegen. Die Coefficienten von $\psi_{11}$ im allgemeinsten Integral zweiter Stufe sind also linear und homogen von den $\nu_0 + \nu_1$ willkürlichen Constanten

$$C_{01},\ C_{02}, \ldots C_{0\nu_0};\quad C_{11},\ C_{12}, \ldots, C_{1\nu_1}$$

abhängig.

Geben wir allen Constanten der ersteren Reihe $C_{01} \ldots C_{0\nu_0}$ den Wert Null und den $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ $\nu_1$ verschiedene Wertsysteme, deren Determinante $\neq 0$ ist, z. B. die Wertsysteme

$$\begin{matrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1, \end{matrix}$$

so sind die Coefficienten von $\log x$ in den $\nu_1$ Integralen und damit die $\nu_1$ Integrale selbst linear unabhängig. Wir erhalten also dadurch $\nu_1$ linear unabhängige Integrale zweiter Stufe, durch welche sich unter Hinzufügung von Integralen erster Stufe jedes Integral zweiter Stufe ausdrücken lässt. Da auch die $\nu_0$ Integrale erster Stufe und diese $\nu_1$ Integrale zweiter Stufe zusammen linear unabhängig sind, weil eben eine lineare Relation zwischen Integralen verschiedener Stufen in Relationen zwischen den Integralen der einzelnen Stufen zerfallen muss[1]) und solche ausgeschlossen sind, so besitzen wir jetzt im Ganzen $\nu_0 + \nu_1$ linear unabhängige Integrale.

Ist $\nu_0 + \nu_1 = \lambda$, so erschöpfen wir mit den Integralen erster und zweiter Stufe bereits die ganze Gruppe $\Gamma$; andernfalls muss es noch Integrale dritter Stufe geben

$$(24)\qquad \begin{aligned} y_2 &= \psi_{22} + 2\psi_{21} \log x + \psi_{20} \log^2 x \\ &= \sum_{(k)}' c_k'' x^k + 2 \log x \sum_{(k)}' c_k' x^k + \log^2 x \sum_{(k)}' c_k x^k. \end{aligned}$$

---

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 5.

rer Berechnung haben wir wieder für $\psi_{21}$ und $\psi_{20}$ zunächst die
n $\psi_{11}$ und $\psi_{10}$ einzusetzen und die Recursionsformel

$$F''_{k\alpha} = 0$$

Bestimmung der Coefficienten $c''_k$ von $\psi_{22}$ zu benutzen. Damit
Coefficienten endliche Werte erhalten, müssen die Bedingungs-
ungen $B_2$ erfüllt werden, welche linear und homogen in den
irlichen Constanten von $\psi_{11}$ und $\psi_{10}$, d. h. in

$$C_{01} \ldots C_{0\nu_0}; \quad C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$$

Um das Letztere hervorzuheben, schreiben wir für den Augen-
die symbolische Bezeichnung für dieses Gleichungssystem aus-
cher in der Form

$$B_2(C_0, C_1).$$

ist

$$B_2(0, C_1) + B_2(C_0, 0) = B_2(C_0, C_1),$$

die linken Seiten der Gleichungen $B_2$ lassen sich als Summen
wei Gliedern darstellen, in deren einem die sämtlichen $C_{01} \ldots C_{0\nu_0}$,
ren anderem die sämtlichen $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ gleich Null gesetzt sind.
man aber in $\psi_{10}$ sämtliche $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ gleich Null setzt, so ist
se Reihe identisch Null, und die für $y_2$ angesetzte Form reduciert
auf die eines Integrals zweiter Stufe. Folglich müssen die Glei-
gen $B_2(C_0, 0)$ mit den Bedingungen $B_1$ identisch sein und *für sich
werden.* Damit dann aber die Bedingungen $B_2(C_0, C_1)$ erfüllt
müssen die $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ also den Bedingungsgleichungen $B_2(0, C_1)$
gen, *in denen sie allein auftreten.*

Dass die Gleichungen $B_2(C_0, 0) = B_1$ von den Constanten $C_{01} \ldots C_{0\nu_0}$
ie mit $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ bezeichneten willkürlich lassen, wissen wir ja
s aus der vorangehenden Betrachtung. Dass diese $C$ gerade in
n allgemeinsten Integral dritter Stufe willkürlich bleiben müssen
nur diese, erkennt man aber auch in anderer Weise. Die
$\ldots C_{1\nu_1}$ sind ja die willkürlichen Coefficienten in der mit $\log x$
plicierten Reihe des allgemeinsten Integrals zweiter Stufe, welches
zu dem allgemeinsten Integral dritter Stufe hinzufügen kann,
dieses zu ändern. Es können aber ausser $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ keine
en Coefficienten in $\psi_{21}$ willkürlich bleiben; denn macht man in
allgemeinsten Integral dritter Stufe $\psi_{20}$ durch Nullsetzen seiner
ürlichen Coefficienten zu Null, so bleibt ja ein Integral zweiter
, bei dem die mit $\log x$ multiplicierte Reihe nicht mehr will-
che Coefficienten enthalten kann als beim allgemeinsten Integral
er Stufe.

Die Gleichungen $B_2(0, C_1)$ müssen nun erfüllbar sein, ohne dass $C_{11} = C_{12} = \cdots = C_{1\nu_1} = 0$ gesetzt wird, weil sonst gar kein Integral dritter Stufe existierte. Es mögen etwa $\nu_2$ von ihnen willkürlich bleiben, wo

$$0 < \nu_2 < \nu_1,$$

während die übrigen linear und homogen durch sie ausdrückbar sind. Diese $\nu_2$ Coefficienten in $\psi_{20}$ bezeichnen wir mit

$$C_{21}\ C_{22} \ldots C_{2\nu_2}.$$

Die Coefficienten von $\psi_{21}$ sind daher linear und homogen in den willkürlich bleibenden Coefficienten dieser Reihe $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ und in den $C_{21} \ldots C_{2\nu_2}$. Von den Coefficienten von $\psi_{20}$ bleiben $\nu_0$ willkürlich, die wir wieder mit den Zeichen $C_{01} \ldots C_{0\nu_0}$ belegen, während alle übrigen linear und homogen durch diese, durch die $C_{11} \ldots C_{1\nu_1}$ und durch die $C_{21} \ldots C_{2\nu_2}$ ausgedrückt sind.

Setzt man in dem allgemeinsten Integral dritter Stufe (24) die $C_0$ und die $C_1 = 0$ und giebt den $C_{21} \ldots C_{2\nu_2}$ der Reihe nach die $\nu_2$ Wertsysteme

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1, \end{array}$$

so hat man $\nu_2$ linear unabhängige Integrale dritter Stufe, durch welche unter Hinzunahme von Integralen zweiter und erster Stufe *jedes* Integral dritter Stufe ausdrückbar ist.

So geht man weiter, bis die Zahl der linear unabhängigen Integrale in der ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Stufe zusammen den Wert $\lambda$ erhält. Man möge so zuletzt zu Integralen $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe gelangen. Ist dann

$$(25) \qquad y_l = \psi_{ll} + \binom{l}{1} \psi_{l,l-1} \log x + \cdots + \psi_{l0} \log^l x$$

das allgemeinste Integral $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe, so sind

$$\begin{array}{llll} \text{in } \psi_{l0} & \text{die Coefficienten} & C_{l1} & , \ldots, C_{l\nu_l} \\ \text{in } \psi_{l1} & \text{„} \quad \text{„} & C_{l-1,1} & , \ldots, C_{l-1,\nu_{l-1}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \text{in } \psi_{ll} & \text{„} \quad \text{„} & C_{01} & , \ldots, C_{0\nu_0} \end{array}$$

willkürlich, und in jeder der Reihen sind alle übrigen Coefficienten linear und homogen durch die in ihr selbst und den mit höheren Potenzen von $\log x$ multiplicierten Reihen enthaltenen willkürlichen Coefficienten ausgedrückt. Da $\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_l = \lambda$, so besitzen

n dem allgemeinsten Integral $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe zugleich das all-
nste Integral der ganzen Gruppe $\Gamma$. Wir erhalten daraus die
meinsten Integrale der niedrigeren Stufen, wenn wir sämtliche
ezw. auch noch sämtliche $C_{l-1}$ u. s. w. gleich Null setzen.

Wir können daher das Ergebnis dieses Artikels dahin zusammen-
n:

*In dem allgemeinsten Integral der Gruppe $\Gamma$*

$$y_l = \psi_{ll} + \binom{l}{1}\psi_{l,\,l-1}\log x + \cdots + \psi_{l0}\log^l x$$

*die Coefficienten jeder Reihe $\psi$ lineare homogene Functionen der in
nd in den folgenden Reihen willkürlich bleibenden Coefficienten. In
eihen willkürlich die $\nu_0$ Coefficienten $C_{01}\ldots C_{0\nu_0}$ derjenigen Potenzen
, die Anfangspotenzen von Integralen erster Stufe sein können, —
$_{l-1}$ die $\nu_1$ Coefficienten $C_{11}\ldots C_{1\nu_1}$ derjenigen Potenzen von $x$, die
ngspotenzen der mit $\log x$ multiplicierten Reihe in Integralen zweiter
sein können, u. s. w. Für die Zahlen $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_l$ besteht die
hung*

$$\nu_0 > \nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_l > 0$$

*die Gleichung*

$$\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_l = \lambda\,.$$

**63. Folgerung aus der Recursionsformel.** Aus der Gestalt der
rsionsformel (15) können wir nunmehr noch eine interessante
erung ziehen, die von erheblichem Vorteil für die praktische Be-
nung der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen ist.

In dem allgemeinsten Integral der Gruppe $\Gamma$

$$y_l = \psi_{ll} + \binom{l}{1}\psi_{l,\,l-1}\log x + \cdots + \psi_{l0}\log^l x,$$

$$\psi_{l\varrho} = \sum_{(k)} c_k^{(\varrho)} x^k \quad (k = r_\lambda, r_\lambda+1, \ldots),$$

$$(\varrho = 0, 1, \ldots, l)$$

n die Coefficienten

$$\begin{array}{llll} c_{r_\lambda}, & c_{r_\lambda+1}, & \ldots, & c_{r_1} \\ c'_{r_\lambda}, & c'_{r_\lambda+1}, & \ldots, & c'_{r_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c^{(l)}_{r_\lambda}, & c^{(l)}_{r_\lambda+1}, & \ldots & c^{(l)}_{r_1} \end{array}$$

n berechnet sein. Dies ist in den beiden vorangehenden Artikeln
ihrlich entwickelt worden und erfordert nur die Auflösung einer

endlichen Anzahl von linearen Gleichungssystemen, deren jedes eine endliche Anzahl von Gleichungen enthält. Unter den $c_{r_\lambda} \dots c_{r_1}$ sind $\nu_l$ willkürlich, die mit $C_{l1}, C_{l2}, \dots, C_{l\nu_l}$ bezeichnet wurden; die übrigen sind lineare homogene Functionen von diesen. Unter den $c'_{r_\lambda}, \dots c'_{r_1}$ sind $\nu_{l-1}$ willkürlich, die mit $C_{l-1,1}, C_{l-1,2}, \dots, C_{l-1,\nu_{l-1}}$ bezeichnet wurden, während die übrigen lineare homogene Functionen von diesen und von $C_{l1} \dots, C_{l\nu_l}$ sind. U. s. w.

Nun bilden wir die Functionen der *unbestimmten* Grösse $\alpha$

$$(26)\quad \begin{cases} C_\alpha(\alpha) = c_{r_\lambda} + c'_{r_\lambda}(\alpha - r_\lambda) + c''_{r_\lambda}\dfrac{(\alpha - r_\lambda)^2}{2!} + \cdots + c^{(l)}_{r_\lambda}\dfrac{(\alpha - r_\lambda)^l}{l!} \\ C_{\alpha+1}(\alpha) = c_{r_\lambda+1} + c'_{r_\lambda+1}(\alpha - r_\lambda) + \cdots\cdots + c^{(l)}_{r_\lambda+1}\dfrac{(\alpha - r_\lambda)^l}{l!} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{\alpha+r_1-r_\lambda}(\alpha) = c_{r_1} + c'_{r_1}(\alpha - r_\lambda) + \cdots\cdots + c^{(l)}_{r_1}\dfrac{(\alpha - r_\lambda)^l}{l!}, \end{cases}$$

setzen diese beziehungsweise für

$$c_\alpha, \; c_{\alpha+1}, \dots, c_{\alpha+r_1-r_\lambda}$$

in die Recursionsformel

$$F_{k\alpha} = 0$$

mit unbestimmt bleibendem $\alpha$ ein und berechnen dann aus dieser, wenn sie für $k = \alpha + r_1 - r_\lambda + 1,\ \alpha + r_1 - r_\lambda + 2, \dots$ gebildet wird, die $c$ mit diesen Indices, für die wir aber auch die Bezeichnung

$$C_k(\alpha)$$

beibehalten. Die mit diesen Coefficienten gebildete Reihe, über deren Convergenz wir natürlich nichts wissen, bezeichnen wir durch

$$(27)\qquad \psi(x, \alpha) = \sum_{(k)} C_k(\alpha) x^k \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \dots).$$

Zunächst erkennt man leicht, dass

$$(28)\qquad \psi(x, r_\lambda) = \psi_{l0}(x).$$

Denn setzt man $\alpha = r_\lambda$, so wird nach (26)

$$(29)\qquad C_{r_\lambda}(r_\lambda) = c_{r_\lambda}, \quad C_{r_\lambda+1}(r_\lambda) = c_{r_\lambda+1}, \dots, C_{r_1}(r_\lambda) = c_{r_1};$$

alle folgenden $C_k(\alpha)$ sind aber durch diese $r_1 - r_\lambda + 1$ vorangehenden vermittelst derselben Gleichungen ausgedrückt wie die $c_k$ durch $c_{r_\lambda}, \dots, c_{r_1}$, sodass allgemein $C_k(r_\lambda) = c_k$.

Durch Differentiation der *Coefficienten* nach $\alpha$ erhält man aus $\psi(x, \alpha)$ die Reihe

$$\sum_{(k)} \frac{d C_k(\alpha)}{d\alpha} x^k \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \dots).$$

Setzt man aber hierin wieder $\alpha = r_\lambda$, so wird

$$\sum_{(k)} C_k'(r_\lambda)\,x^k \equiv \sum_{(k)} c_k' x^k \equiv \psi_{l1}(x), \tag{30}$$

wenn

$$C_k'(r_\lambda) \equiv \frac{d\,C_k(\alpha)}{d\,\alpha} \text{ für } \alpha = r_\lambda .$$

In der That, nach (26) ist zunächst

$$C_{r_\lambda}'(r_\lambda) \equiv c_{r_\lambda}', \quad C_{r_\lambda+1}'(r_\lambda) \equiv c_{r_\lambda+1}', \ldots, C_{r_1}' \equiv c_{r_1}' . \tag{31}$$

Um aber ein beliebiges $C_k'(\alpha)$ zu finden, hat man die Recursionsformel $F_{k\alpha} = 0$, gebildet für die $C_k(\alpha)$ statt $c_k$, nur nach $\alpha$ zu differenzieren. Dies ist jetzt nicht blos symbolisch möglich, weil alle $C_k(\alpha)$ Functionen von $\alpha$ sind. Die aus der differenzierten Recursionsformel für $k \geqq \alpha + r_1 - r_\lambda + 1$ fliessenden Gleichungen geben uns die Werte der ersten Ableitungen der $C_k(\alpha)$ von $C_{\alpha+r_1-r_\lambda+1}'(\alpha)$ an. Da diese Gleichungen aber mit denjenigen für die $c_k'$ identisch sind und für $\alpha = r_\lambda$ die Identitäten $C_k(r_\lambda) \equiv c_k$ und (31) bestehen, so wird in der That allgemein für jeden Wert von $k$

$$C_k'(r_\lambda) \equiv c_k' .$$

Genau so beweist man die Identitäten

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{(k)} C_k''(r_\lambda)x^k \equiv \sum_{(k)} c_k'' x^k \equiv \psi_{l2}(x) \\ &\sum_{(k)} C_k'''(r_\lambda)x^k \equiv \sum_{(k)} c_k''' x^k \equiv \psi_{l3}(x) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{(k)} C_k^{(l)}(r_\lambda)\,x^k \equiv \sum_{(k)} c_k^{(l)} x^k \equiv \psi_{ll}(x) . \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Wir sehen also, dass die Reihen $\psi_{l0}, \psi_{l1}, \ldots, \psi_{ll}$ in dem allgemeinsten Integral der Gruppe aus $\psi(x, \alpha)$ entstehen, indem die Coefficienten dieser Reihe bezw. $0, 1, 2, \ldots l$-mal nach $\alpha$ differenziert werden und darauf $\alpha = r_\lambda$ gesetzt wird. Beachten wir aber, dass die Reihe $\psi(x, \alpha)$ ausser in den Coefficienten auch in den Exponenten von $x$ von $\alpha$ abhängt, dass

$$\frac{d\,x^\alpha}{d\alpha} \equiv x^\alpha \log x$$

ist, und dass man

$$\psi(x, \alpha) \equiv x^\alpha \sum_{(k)} C_{k+\alpha}(\alpha)x^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

setzen kann, wo die Exponenten von $x$ in der Summe jetzt von $\alpha$ unabhängig sind, so folgt

$$(33)\quad \begin{cases} [\psi(x,\alpha)]_{\alpha=r_\lambda} = \psi_{l0} \\ \left[\frac{\partial\psi(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=r_\lambda} = \psi_{l1} + \psi_{l0}\log x \\ \left[\frac{\partial^2\psi(x,\alpha)}{\partial\alpha^2}\right]_{\alpha=r_\lambda} = \psi_{l2} + 2\psi_{l1}\log x + \psi_{l0}\log^2 x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[\frac{\partial^l\psi(x,\alpha)}{\partial\alpha^l}\right]_{\alpha=r_\lambda} = \psi_{ll} + \binom{l}{1}\psi_{l,l-1}\log x + \dots + \psi_{l0}\log^l x. \end{cases}$$

Wir erhalten demnach durch $l$-fache Differentiation der Reihe $\psi(x,\alpha)$ nach $\alpha$ und durch die Substitution $\alpha = r_\lambda$ das allgemeinste Integral $y_l$ der Gruppe $\Gamma$.

Dass wir über die Convergenz der von $x$ und $\alpha$ abhängigen Reihe $\psi(x,\alpha)$ nichts wissen, ist dabei ganz gleichgültig, da wir die gliedweise Differentiation, d. h. die Differentiation der einzelnen $C_k(\alpha)$ jedenfalls ausführen, dann aber eben aus der besonderen Gestalt der Recursionsformeln (15) erschliessen können, dass die so formal erzeugten Reihen für $\alpha = r_\lambda$ in die convergenten Reihen des allgemeinsten Integrals der Gruppe übergehen. Wir haben also das Resultat:

*Nach Auflösung einer endlichen Anzahl von endlichen linearen Gleichungssystemen bilden wir lediglich mit Hülfe der einen Recursionsformel $F_{k\alpha} = 0$ nach (27) die Reihe*

$$\psi(x,\alpha),$$

*welche $l$-mal nach $\alpha$ differenziert für $\alpha = r_\lambda$ das allgemeinste Integral der Gruppe $\Gamma$*

$$\left[\frac{\partial^l\psi(x,\alpha)}{\partial\alpha^l}\right]_{\alpha=r_\lambda} = y_l = \psi_{ll} + \binom{l}{1}\psi_{l,l-1}\log x + \dots + \psi_{l0}\log^l x$$

*liefert*[1]).

Mit dem allgemeinsten Integral der ganzen Gruppe $\Gamma$ umfassen wir nun sämtliche Integrale derselben, insbesondere also auch sämtliche Integrale, die zu den einzelnen Wurzeln $r_1\, r_2 \dots r_\lambda$ der determinierenden Gleichung gehören. Hätten wir nur ein Integral aufsuchen wollen, das sämtliche Integrale umfasst, die etwa zu $r_1\, r_2 \dots r_\alpha$ $(\alpha < \lambda)$ gehören, so hätten wir genau wie im Vorstehenden verfahren können, nur an Stelle von $r_\lambda$, der kleinsten Wurzel der ganzen Gruppe, die kleinste der zu berücksichtigenden Wurzeln, $r_\alpha$, einsetzen müssen.

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 76. (1873) p. 214 ff., insbesondere S. 222. — Tannery, Annales de l'école normale, 2me série, t. 4. (1875). S. 143. 144.

**64. Beispiel.** Um die in diesem Kapitel entwickelte Berechnung der logarithmenbehafteten Integrale an einem möglichst einfachen Beispiel[1]) zu veranschaulichen, wählen wir die Gauss'sche Differentialgleichung mit der speziellen Bestimmung, dass beide Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung den Wert Null haben. Dies tritt nach Artikel 10 ein, wenn $\gamma = 1$. Wir betrachten also die Differentialgleichung

(34) $$x(x-1)y'' - [1-(\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta y = 0$$

mit der zu $x = 0$ gehörigen Recursionsformel

(35) $$(k+\alpha-1)(k+\beta-1)c_{k-1} - k^2 c_k = 0\,.$$

Da $k = 0$ eine Doppelwurzel der determinierenden Gleichung ist, ist das allgemeinste Integral der entsprechenden Gruppe $\Gamma$, welches sich hier mit dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung deckt, in der Form

$$y_1 = \psi_{11} + \psi_{10}\log x = \sum_{(k)} c'_k x^k + \log x \sum_{(k)} c_k x^k$$

anzusetzen. Die Reihe $\psi_{10}$ ist nach der Formel (35) zu berechnen, welche nur $c_0$ willkürlich lässt und ergiebt (s. Art. 23)

$$\psi_{10} = c_0 F(\alpha, \beta, 1; x)\,.$$

Zur Berechnung von $\psi_{11}$ müssen wir Formel (35) nach der in der allgemeinen Entwicklung immer mit $\alpha$ bezeichneten Grösse — in Bezug auf die $c$ nur symbolisch — differenzieren. Diese Grösse wollen wir hier, weil der Buchstabe $\alpha$ in der Gauss'schen Differentialgleichung noch anderweitig vorkommt, mit $a$, die linke Seite von (35) demnach mit $F_{ka}$ bezeichnen. Da nun $k$ um eine ganze Zahl grösser als $a$ ist und die Recursionsformel (35) nur eine stets endlich bleibende Zahl von Gliedern (zwei) enthält, können wir in diesem Specialfall einfach nach $k$ differenzieren und erhalten so zur Bestimmung der Coefficienten $c'$ von $\psi_{11}$ die Formel

(36) $$\begin{aligned} F'_{ka} = {} & (2k+\alpha+\beta-2)c_{k-1} - 2k c_k \\ & + (k+\alpha-1)(k+\beta-1)c'_{k-1} - k^2 c'_k = 0\,, \end{aligned}$$

welche nur $c_0'$ willkürlich lässt und alle andern $c'$ als lineare homogene Functionen von $c_0$ und $c_0'$ ausdrückt, wie es mit der allgemeinen Theorie übereinstimmt.

Um jedoch für die Berechnung des allgemeinen Integrals $y_1$

1) Vergl. dazu Lohnstein, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. 38. (1893). S. 27 ff. — Vergl. auch Artikel 113.

die Methode des vorigen Artikels anzuwenden, haben wir zunächst nach (26)

$$C_a(a) = c_0 + c_0' a$$

zu setzen. Die folgenden Coefficienten $C_{a+1}(a)$, $C_{a+2}(a)$, ... der jetzt zu bildenden Reihe $\psi(x, a)$ werden aus der Recursionsformel (35) berechnet, wenn man darin $k = a + 1$, $a + 2$, ... und $C_k(a)$ statt $c_k$ setzt.

Also ergiebt sich

$$\psi(x, a)$$

$$= (c_0 + c_0' a) x^a \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha + a) \ldots (\alpha + a + k - 1)(\beta + a) \ldots (\beta + a + k - 1)}{(a + 1)^2 \ldots (a + k)^2} x^k \right].$$

Differenziert man einmal — weil ja das gesuchte Integral nur zweiter Stufe ist — nach $a$, so folgt

$$\frac{\partial \psi(x, a)}{\partial a} = c_0' x^a \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha + a) \ldots (\beta + a + k - 1)}{(a + 1)^2 \ldots (a + k)^2} x^k \right]$$

$$+ (c_0 + c_0' a) x^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{(\alpha + a) \ldots (\beta + a + k - 1)}{(a + 1)^2 \ldots (a + k)^2} \right) x^k$$

$$+ \log x \, (c_0 + c_0' a) x^a \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha + a) \ldots (\beta + a + k - 1)}{(a + 1)^2 \ldots (a + k)^2} x^k \right].$$

Setzen wir $a = 0$ und bezeichnen die aus der Summe in der zweiten Zeile dieser Formel entstehende Reihe kurz mit

$$F_1(\alpha, \beta, 1; x),$$

so ergiebt sich das allgemeine Integral von (34) bei $x = 0$ in der Gestalt

$$(37) \qquad y_1 = c_0' F(\alpha, \beta, 1; x) + c_0 F_1(\alpha, \beta, 1; x) + c_0 F(\alpha, \beta, 1; x) \log x.$$

Nach der allgemeinen Theorie (s. z. B. Artikel 62 Schluss) wäre hier $c_0$ mit $C_{11}$, $c_0'$ mit $C_{01}$ identisch. Setzt man $c_0 = 0$, so bleibt in (37) in der That das allgemeinste Integral erster Stufe übrig; setzt man $c_0' = 0$, so bleibt ein Integral zweiter Stufe, durch welches mit Hinzunahme des allgemeinsten Integrals erster Stufe jedes der zweiten ausdrückbar ist. Die Coefficienten von $\psi_{10}$ sind linear und homogen in $c_0 = C_{11}$, die von $\psi_{11}$ in $c_0 = C_{11}$ und $c_0' = C_{01}$.

# Kapitel IX.

## Zerlegung der Integralgruppen in Untergruppen.

65. **Fundamentalsystem von lauter einfachsten Integralen.** Wir
en im Artikel 55 die Aufstellung eines Fundamentalsystems von
gralen für die Umgebung der Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ ge-
ert, dessen Elemente eine möglichst einfache Gestalt haben, d. h.
welchem der Logarithmus in jedem Element nur bis zu einer mög-
t niedrigen Potenz aufsteigt.

Diese Aufgabe ist durch die Entwicklungen des vorigen Kapitels
sächlich bereits gelöst. Nach denselben sind wir ja im Stande,
jede der den einzelnen Wurzelgruppen $g, g_1, g_2, \ldots$ der determi-
enden Gleichung entsprechenden Integralgruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$
allgemeinste Integral aufzustellen. Dies lautet für die Gruppe $\Gamma$

$$y_l \equiv \psi_{l\,l} + \binom{l}{1} \psi_{l,l-1} \log x + \cdots + \psi_{l0} \log^l x$$

enthält linear und homogen die $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_l \equiv \lambda$ willkür-
en Constanten

$$C_{01} \ldots C_{0\nu_0}, \quad C_{11} \ldots C_{1\nu_1}, \ldots, C_{l1} \ldots C_{l\nu_l},$$

aus $l + 1$ verschiedenen Serien bestehen. Giebt man diesen
nstanten die $\lambda$ Wertsysteme

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1, \end{matrix}$$

rhält man bezw. die $\lambda$ Integrale der Gruppe $\Gamma$

$$y_{01}\; y_{02} \ldots y_{0\nu_0},\; y_{11} \ldots y_{1\nu_1}, \ldots, y_{l1} \ldots y_{l\nu_l},$$

also das Integral $y_{\alpha\nu_\beta}$ aus $y_l$ entsteht, indem $C_{\alpha\nu_\beta} = 1$, alle andern
stanten aber $= 0$ gesetzt werden. Diese $\lambda$ Integrale sind linear
hängig, da die Coefficienten der höchsten Potenz von $\log x$ in
Integralen gleicher Stufe immer linear unabhängig sind. Da sich
weiter durch $y_{01} \ldots y_{0\nu_0}$ *jedes* Integral erster Stufe ausdrücken

liess, giebt es kein von diesen linear unabhängiges Integral der ersten Stufe. Da sich jedes Integral zweiter Stufe durch $y_{l1} \dots y_{l\nu_l}$ und Integrale erster Stufe ausdrücken liess, giebt es also kein anderes von jenen und den Integralen erster Stufe linear unabhängiges Integral zweiter Stufe. U. s. w. Die Integrale (2) setzen sich also aus möglichst vielen linear unabhängigen Integralen erster, dann aus möglichst vielen linear unabhängigen Integralen zweiter Stufe u. s. w. zusammen; d. h. *wenn die Integrale einer jeden Gruppe in derselben Weise bestimmt werden wie die Integrale* (2) *bei* $\Gamma$, *so erhalten wir ein aus lauter einfachsten Integralen zusammengesetztes Fundamentalsystem.*

**66. Integraluntergruppen. Untergruppen höchster Stufe**[1]. Die zweite Forderung, die im Artikel 55 ausgesprochen wurde, war die nach einem Fundamentalsystem, bei welchem die Umlaufsrelationen sich möglichst einfach und übersichtlich gestalten. Auch hierzu gelangen wir von dem im vorigen Kapitel aufgestellten allgemeinsten Integral der Gruppe aus, indem wir daraus $\lambda$ linear unabhängige, derart in *Untergruppen* zusammengefasste Integrale herleiten, dass in die Umlaufsrelation jedes Integrals immer nur die Integrale seiner Untergruppe eintreten.

Wir stellen zunächst diejenigen Untergruppen auf, deren Integrale bis zur höchsten, der $(l+1)^{\text{ten}}$ Stufe aufsteigen, oder — wie wir kurz sagen wollen — *die Untergruppen höchster Stufe*. Zu dem Ende gehen wir von den $\nu_l$ linear unabhängigen Integralen $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe

$$y_{l1},\ y_{l2},\ \dots,\ y_{l\nu_l}$$

aus, die wir aber jetzt mit

$$\eta_{l1},\ \eta_{l2},\ \dots,\ \eta_{l\nu_l}$$

bezeichnen wollen. Sie gehen aus dem allgemeinsten Integral der Gruppe $\Gamma$ hervor, indem jedes Mal eine andere der Constanten $C_{l1}, C_{l2}, \dots, C_{l\nu_l} = 1$, alle andern willkürlichen Constanten aber $= 0$ gesetzt werden. Die dadurch aus $\psi_{ll}, \psi_{l,l-1}, \dots, \psi_{l0}$ entstehenden Reihen wollen wir bezw. durch

$$\varphi_{ll}^{(a)},\ \varphi_{l,l-1}^{(a)},\ \dots,\ \varphi_{l0}^{(a)}$$

bezeichnen, wo $a$ bei den Integralen $\eta_{l1}, \eta_{l2} \dots \eta_{l\nu_l}$ bezw. den Wert $1, 2, \dots, \nu_l$ hat. Es ist also

$$\eta_{la} = \varphi_{ll}^{(a)} + \binom{l}{1}\varphi_{l,l-1}^{(a)} \log x + \cdots + \varphi_{l0}^{(a)} \log^l x \tag{3}$$
$$(a = 1, 2, \dots, \nu_l).$$

---

1) Die Aufstellung der Untergruppen erfolgt hier im Wesentlichen nach Jürgens, Crelles Journ. Bd. 80. (1875). S. 153 ff.

Aus jedem der Integrale $\eta_{l\alpha}$ erhalten wir nun sofort $l$ andere durch partielle Differentiation nach $\log x$

$$\frac{1}{l}\frac{\partial \eta_{l\alpha}}{\partial \log x}, \quad \frac{1}{l(l-1)}\frac{\partial^2 \eta_{l\alpha}}{(\partial \log x)^2}, \ldots, \frac{1}{l!}\frac{\partial^l \eta_{l\alpha}}{(\partial \log x)^l}. \tag{4}$$

Von den Integralen (3) und (4) wollen wir sagen, *sie bilden eine Untergruppe* $(l+1)^{\text{ter}}$ *Stufe in der Gruppe* $\Gamma$ und diese Untergruppe durch $\Gamma_{l\alpha}$ bezeichnen. Die Untergruppe $\Gamma_{l\alpha}$ lautet also

$$\left\{\begin{aligned} \eta_{l\alpha} &= \varphi_{ll}^{(\alpha)} + \binom{l}{1}\varphi_{l,l-1}^{(\alpha)}\log x + \cdots + \varphi_{l0}^{(\alpha)}\log^l x \\ \frac{1}{l}\frac{\partial \eta_{l\alpha}}{\partial \log x} &= \varphi_{l,l-1}^{(\alpha)} + \binom{l-1}{1}\varphi_{l,l-2}^{(\alpha)}\log x + \cdots + \varphi_{l0}^{(\alpha)}\log^{l-1} x \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{l!}\frac{\partial^l \eta_{l\alpha}}{(\partial \log x)^l} &= \varphi_{l0}^{(\alpha)}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Diese Untergruppen haben nun die folgenden bemerkenswerten Eigenschaften, von denen einige dieselben wesentlich von der im Kap. VII aufgestellten Gruppe $\Gamma$ unterscheiden:

1) *Die Integrale einer Untergruppe sind linear unabhängig*, weil jedes Integral $\log x$ bis zu einer andern Potenz enthält als alle andern [1]).

2) *Die Integrale aller Untergruppen* $\Gamma_{l\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \nu_l)$ *sind linear unabhängig*, weil die jeweils mit der höchsten Potenz von $\log x$ multiplicierten Reihen in den verschiedenen Untergruppen

$$\varphi_{l0}^{(1)},\ \varphi_{l0}^{(2)}, \ldots, \varphi_{l0}^{(\nu_l)}$$

linear unabhängig sind [1]). Wir besitzen daher mit den $\nu_l$ Untergruppen $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe $\Gamma_{l\alpha}$ schon $(l+1)\nu_l$ linear unabhängige in die Gruppe $\Gamma$ gehörige Integrale.

3) *Jede Untergruppe* $(l+1)^{\text{ter}}$ *Stufe* $\Gamma_{l\alpha}$ *führt nur* $l+1$ *verschiedene Reihen als Coefficienten der Potenzen von* $\log x$ *ein*, sodass die für die Gruppe $\Gamma$ in Artikel 52 abgeleiteten Relationen bei den Untergruppen die denkbar einfachste Gestalt annehmen und aus (5) unmittelbar abzulesen sind.

4) *Die Umlaufsrelationen führen jedes Integral einer Untergruppe* $\Gamma_{l\alpha}$ *in eine lineare homogene Function von sich selbst und den in seiner Untergruppe folgenden* (bezw. bei umgekehrter Reihenfolge der Integrale (5) vorangehenden) *Integralen mit explicite angebbaren*

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 5.

*Coefficienten über.* Denn nach Artikel 56 Formel (6) ist ja für ein Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe $y$

$$\frac{\bar{y}}{\omega_1} = y + \frac{2\pi i}{1}\frac{\partial y}{\partial \log x} + \frac{(2\pi i)^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{(\partial \log x)^2} + \cdots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!}\frac{\partial^\sigma y}{(\partial \log x)^\sigma}.$$

Also lauten die *Umlaufsrelationen der Integrale von* $\Gamma_{l\alpha}$:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_1}\,\overline{\eta_{l\alpha}} = \eta_{l\alpha} + \dfrac{2\pi i}{1}\dfrac{\partial \eta}{\partial \log x} + \cdots + \dfrac{(2\pi i)^l}{l!}\dfrac{\partial^l \eta_{l\alpha}}{(\partial \log x)^l} \\[2ex] \dfrac{1}{\omega_1}\,\overline{\dfrac{\partial \eta_{l\alpha}}{\partial \log x}} = \dfrac{\partial \eta_{l\alpha}}{\partial \log x} + \dfrac{2\pi i}{1}\dfrac{\partial^2 \eta_{l\alpha}}{(\partial \log x)^2} + \cdots + \dfrac{(2\pi i)^{l-1}}{(l-1)!}\dfrac{\partial^l \eta_{l\alpha}}{(\partial \log x)^l} \\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[1ex] \dfrac{1}{\omega_1}\,\overline{\dfrac{\partial^l \eta_{l\alpha}}{(\partial \log x)^l}} = \dfrac{\partial^l \eta_{l\alpha}}{(\partial \log x)^l}. \end{cases}$$

**67. Aufstellung der übrigen Untergruppen.** Mit den $(l+1)\nu_l$ Integralen der Untergruppen $\Gamma_{l1}, \Gamma_{l2}, \ldots, \Gamma_{l\nu_l}$ besitzen wir aber im Allgemeinen erst weniger als $\lambda$ linear unabhängige Integrale der Gruppe $\Gamma$, es sei denn, dass

$$\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_l$$

wäre, in welchem Falle schon $(l+1)\nu_l = \lambda$ ist. Alsdann hätten wir die Gruppe $\Gamma$ repräsentiert durch $\lambda$ linear unabhängige Integrale, die in $\nu_l$ Untergruppen $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe gesondert sind.

Sind dagegen nicht alle $\nu$ einander gleich, so wollen wir annehmen, dass schon

$$\nu_{l-1} > \nu_l$$

sei und noch die Bezeichnungen

$$(7)\qquad \mu_l = \nu_l, \quad \mu_{l-1} = \nu_{l-1} - \nu_l, \quad \mu_{l-2} = \nu_{l-2} - \nu_{l-1}, \ldots$$
$$\mu_0 = \nu_0 - \nu_1$$

einführen, wo alle $\mu$ also positive ganze Zahlen oder Null sind. Nun setzen wir in dem allgemeinsten Integral der Gruppe $\Gamma$ (1) die sämtlichen Constanten

$$C_0, C_1, \ldots, C_{l-2}, C_l = 0,$$

sodass sich das Integral auf die $l^{\text{te}}$ Stufe reduciert. Von den Constanten $C_{l-1}$ setzen wir diejenigen $\nu_l$ ebenfalls gleich Null, welche in $\psi_{l1}$ mit denselben Potenzen multipliciert sind wie $C_{l1} \ldots C_{l\nu_l}$ in $\psi_{l0}$. Den $\nu_{l-1} - \nu_l = \mu_{l-1}$ übrigen geben wir die Wertsysteme

$$\begin{matrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{matrix}$$

und mögen dadurch aus

$$\psi_{ll}, \ \binom{l}{1}\psi_{l,l-1}, \ \binom{l}{2}\psi_{l,l-2}, \ \ldots, \ \binom{l}{l-1}\psi_{l1}$$

bezw. die Reihen

$$\varphi^{(\alpha)}_{l-1,l-1}, \ \binom{l-1}{1}\varphi^{(\alpha)}_{l-1,l-2}, \ \binom{l-1}{2}\varphi^{(\alpha)}_{l-1,l-3}, \ \ldots, \ \varphi^{(\alpha)}_{l-1,0}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, \mu_{l-1})$$

erhalten.

Die $\mu_{l-1}$ Reihen $\varphi^{(\alpha)}_{l-1,0}$ fangen dieser Constantenbestimmung zufolge jede mit einer andern Potenz an und auch mit andern Potenzen als die Reihen

$$\varphi^{(\alpha)}_{l0}$$

in den Untergruppen $\Gamma_{l\alpha}$. Die $\mu_l + \mu_{l-1}$ Reihen

$$\varphi^{(\alpha)}_{l0} \ (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu_l), \qquad \varphi^{(\alpha)}_{l-1,0} \ (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu_{l-1})$$

sind daher linear unabhängig.

Die $\mu_{l-1}$ Integrale $l^{\text{ter}}$ Stufe, die wir so gebildet haben, bezeichnen wir bezw. mit

$$\eta_{l-1,1}, \ \eta_{l-1,2}, \ \ldots, \ \eta_{l-1,\mu_{l-1}}.$$

Aus jedem derselben leiten wir durch Differentiation nach $\log x$ $l-1$ andere ab und erhalten so die $\mu_{l-1}$ Untergruppen $l^{\text{ter}}$ Stufe $\Gamma_{l-1,\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \mu_{l-1})$

$$(8) \quad \begin{cases} \eta_{l-1,\alpha} = \varphi^{(\alpha)}_{l-1,l-1} + \binom{l-1}{1}\varphi^{(\alpha)}_{l-1,l-2}\log x + \cdots + \varphi^{(\alpha)}_{l-1,0}\log^{l-1} x \\ \frac{1}{l-1}\frac{d\eta_{l-1,\alpha}}{d\log x} = \varphi^{(\alpha)}_{l-1,l-2} + \binom{l-2}{1}\varphi^{(\alpha)}_{l-1,l-3}\log x + \cdots + \varphi^{(\alpha)}_{l-1,0}\log^{l-2} x \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{1}{(l-1)!}\frac{d^{l-1}\eta_{l-1,\alpha}}{(d\log x)^{l-1}} = \varphi^{(\alpha)}_{l-1,0}. \end{cases}$$

Die $l\mu_{l-1}$ Integrale der Untergruppen $\Gamma_{l-1,\alpha}$ sind wieder linear unabhängig, und nach den oben gemachten Bemerkungen über die Reihen $\varphi^{(\alpha)}_{l0}$ und $\varphi^{(\alpha)}_{l-1,0}$ gilt das Gleiche von den Integralen der Gruppen $\Gamma_{l\alpha}$ und $\Gamma_{l-1,\alpha}$ zusammengenommen. Ist $\nu_l = \nu_{l-1}$, also $\mu_l = 0$, so erhalten wir keine Untergruppen $l^{\text{ter}}$ Stufe; dann sind also schon sämtliche aus dem allgemeinsten Integral (1) fliessende Integrale $l^{\text{ter}}$ Stufe durch die Integrale der Untergruppen $\Gamma_{l\alpha}$ ausdrückbar.

Wenn nun

$$(l+1)\mu_l + l\mu_{l-1} = \lambda,$$

so haben wir also die sämtlichen Integrale von $\Gamma$ in $\mu_l$ Untergruppen $(l+1)^{\text{ter}}$ und $\mu_{l-1}$ Untergruppen $l^{\text{ter}}$ Stufe gesondert. Andernfalls stellen wir nun ganz analog die Untergruppen $(l-1)^{\text{ter}}$ Stufe auf, deren Zahl $\nu_{l-2} - \nu_{l-1} \equiv \mu_{l-2}$ betragen muss, u. s. w., endlich die $\nu_0 - \nu_1 \equiv \mu_0$ Untergruppen erster Stufe, deren jede nur aus einem Integral erster Stufe besteht. Da wir dann im Ganzen

$$\begin{aligned}
&(l+1)\mu_l + l\mu_{l-1} + (l-1)\mu_{l-2} + \cdots + 2\mu_1 + \mu_0 \\
&\equiv (l+1)\nu_l + l(\nu_{l-1} - \nu_l) + \cdots + 2(\nu_1 - \nu_2) + (\nu_0 - \nu_1) \\
&\equiv \nu_l + \nu_{l-1} + \nu_{l-2} + \cdots + \nu_1 + \nu_0 \equiv \lambda
\end{aligned}$$

linear unabhängige Integrale besitzen, erschöpfen wir also die ganze Integralgruppe $\Gamma$.

Wir können daher das Ergebnis des gegenwärtigen und des vorangehenden Artikels folgendermassen aussprechen:

*Ist*

$$y_l \equiv \psi_{ll} + \binom{l}{1}\psi_{l,l-1}\log x + \cdots + \psi_{l0}\log^l x$$

*das allgemeinste Integral der Gruppe $\Gamma$ und $\nu_l$ die Anzahl der willkürlichen Constanten in $\psi_{l0}$, $\nu_{l-1}$ die der in $\psi_{l1}$ hinzutretenden, u. s. w., endlich $\nu_0$ die der in $\psi_{ll}$ zu den vorangehenden noch hinzutretenden willkürlichen Constanten, so kann man $\lambda$ linear unabhängige Integrale der Gruppe so bestimmen, dass sich dieselben in*

$$\begin{array}{llllll}
\mu_l & \equiv \nu_l & \textit{Untergruppen } (l+1)^{ter} & \textit{Stufe} & \Gamma_{l1} & ,\ldots, \Gamma_{l\mu_l} \\
\mu_{l-1} & \equiv \nu_{l-1} - \nu_l & \quad ,, \quad l^{ter} & \quad ,, & \Gamma_{l-1,1} & ,\ldots, \Gamma_{l-1,\mu_{l-1}} \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mu_0 & \equiv \nu_0 - \nu_1 & \quad ,, \quad 1^{ter} & \quad ,, & \Gamma_{01} & ,\ldots, \Gamma_{0\mu_0}
\end{array}$$

*sondern. Eine Untergruppe $\Gamma_{\alpha a}$* $(a = 1, 2, \ldots, \mu_\alpha;\ \alpha = 0, 1, \ldots, l)$ *hat die Gestalt*

$$\begin{aligned}
\eta_{\alpha a} &\equiv \varphi^{(a)}_{\alpha\alpha} + \binom{\alpha}{1}\varphi^{(a)}_{\alpha,\alpha-1}\log x + \cdots + \varphi^{(a)}_{\alpha 0}\log^\alpha x \\
\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \eta_{\alpha a}}{\partial \log x} &\equiv \varphi^{(a)}_{\alpha,\alpha-1} + \binom{\alpha-1}{1}\varphi^{(a)}_{\alpha,\alpha-2}\log x + \cdots + \varphi^{(a)}_{\alpha 0}\log^{\alpha-1} x \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha \eta_{\alpha a}}{(\partial \log x)^\alpha} &\equiv \varphi^{(a)}_{\alpha 0}.
\end{aligned}$$

*Die Umlaufsrelationen führen jedes Integral nur in eine lineare homogene Verbindung mit explicite angebbaren Coefficienten von sich selbst und den in der Untergruppe folgenden Integralen über. Die Gesamtzahl der Untergruppen, $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_l \equiv \nu_0$, stimmt mit der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Stufe überein.*

Die Zahlen $\mu_0\ \mu_1 \ldots \mu_l$ werden später von anderer Seite her noch eine besondere Bedeutung gewinnen.

**68. Modificierte Aufstellung der Untergruppen.** Mit Rücksicht auf den Umstand, dass in der Literatur über diesen Gegenstand die Untergruppen vielfach in einer von der bisher gegebenen etwas verschiedenen Gestalt auftreten, wollen wir zeigen, wie die letztere aus der unsrigen herzuleiten ist.

Wir behalten von jeder Untergruppe $\Gamma_{\alpha\alpha}$ das Integral höchster Stufe

$$\eta_{\alpha\alpha} = \varphi_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} + \binom{\alpha}{1} \varphi_{\alpha,\alpha-1}^{(\alpha)} \log x + \cdots + \varphi_{\alpha 0}^{(\alpha)} \log^{\alpha} x$$

unverändert bei und bezeichnen dies jetzt durch

$$\zeta_{\alpha\alpha} = \eta_{\alpha\alpha}. \tag{9}$$

Als zweites Integral nehmen wir aber

$$\zeta_{\alpha\alpha}' = \eta_{\alpha\alpha} - \omega_1 \overline{\eta}_{\alpha\alpha} = \zeta_{\alpha\alpha} - \omega_1 \overline{\zeta}_{\alpha\alpha}, \tag{9'}$$

wo die überstrichenen Functionen wieder die durch einen Umlauf um $x = 0$ aus den nicht überstrichenen erzeugten bedeuten, als drittes

$$\begin{aligned} \zeta_{\alpha\alpha}'' &= \eta_{\alpha\alpha} - \omega_1 \overline{\eta}_{\alpha\alpha} - \omega_1 (\overline{\eta}_{\alpha\alpha} - \omega_1 \overline{\overline{\eta}}_{\alpha\alpha}) \\ &= \zeta_{\alpha\alpha}' - \omega_1 \overline{\zeta}_{\alpha\alpha}' \end{aligned} \tag{9''}$$

u. s. w. Da die Stufe dieser Integrale in (9), (9′), (9″) u. s. w. sich jedesmal um die Einheit verringert, wie aus den Umlaufsrelationen, die die Form der Gleichungen (6) haben, folgt, so erhalten wir schliesslich in

$$\zeta_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} \tag{9^{(\alpha)}}$$

ein Integral erster Stufe, das sich von

$$\frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha} \eta_{\alpha\alpha}}{(\partial \log x)^{\alpha}} = \varphi_{\alpha 0}^{(\alpha)}$$

nur durch einen constanten Faktor unterscheidet. Für dieses letzte Integral ist daher

$$\overline{\zeta}_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} = \omega_1 \zeta_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}. \tag{10}$$

Wir haben also jetzt die Untergruppe $\Gamma_{\alpha a}$ zusammengesetzt aus den Integralen

(11) $$\zeta_{\alpha a}^{(\alpha)},\ \zeta_{\alpha a}^{(\alpha-1)},\ \ldots,\ \zeta_{\alpha a}',\ \zeta_{\alpha a}.$$

Nach (9′), (9″) u. s. w. (10) lauten aber *die Umlaufsrelationen dieser modificierten Untergruppe* $\Gamma_{\alpha a}$

(12) $$\begin{cases} \overline{\zeta_{\alpha a}^{(\alpha)}} \equiv \omega_1 \zeta_{\alpha a}^{(\alpha)} \\ \overline{\zeta_{\alpha a}^{(\alpha-1)}} \equiv \omega_1 \zeta_{\alpha a}^{(\alpha-1)} + \zeta_{\alpha a}^{(\alpha)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overline{\zeta_{\alpha a}'} \equiv \omega_1 \zeta_{\alpha a}' + \zeta_{\alpha a}'' \\ \overline{\zeta_{\alpha a}} \equiv \omega_1 \zeta_{\alpha a} + \zeta_{\alpha a}' \end{cases}$$

d. h. *bei der modificierten Gestalt* (11) *der Untergruppe* $\Gamma_{\alpha a}$ *multpliciert sich jedes Integral mit* $\omega_1$ *und vermehrt sich um das vorhergehende Integral.*

**69. Specialfälle und Beispiele.** Im Artikel 53 haben wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zusammengestellt, dass die ganze Integralgruppe $\Gamma$ logarithmenfrei ist. Ist dies aber der Fall, so giebt es $\lambda$ linear unabhängige Integrale erster Stufe in der Gruppe $\Gamma$ oder *die Gruppe* $\Gamma$ *zerfällt in* $\lambda$ *Untergruppen erster Stufe.*

Bei einer *regulären Stelle* gehören sämtliche Wurzeln der determinierenden Gleichung $0, 1, \ldots, n-1$ in eine einzige Gruppe $g$. Zu jeder derselben gehört ein Integral erster Stufe. Mithin können wir sagen: *Bei einer regulären Stelle sondern sich die* $n$ *Elemente eines Fundamentalsystems, die sämtlich zu derselben Gruppe* $\Gamma$ *gehören, in* $n$ *Untergruppen erster Stufe.*

Als weiteres Beispiel benutzen wir die in Artikel 54 behandelte Differentialgleichung

(13) $$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0,$$

wo $a_1\, a_2 \ldots a_n$ Constanten sind. Sind $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ die Wurzeln einer Gruppe $g$ der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung, so entspricht jeder einfachen Wurzel $r_i$ ein Integral $x^{r_i}$, jeder $\gamma$-fachen Wurzel $r_k$ entsprechen die $\gamma$ Integrale

$$x^{r_k},\quad x^{r_k}\log x,\ \ldots,\ x^{r_k}\log^{\gamma-1} x.$$

Jedes der ersteren bildet für sich eine Untergruppe erster Stufe, die letzteren bilden zusammen eine solche $\gamma^{\text{ter}}$ Stufe; denn aus dem letzten jener $\gamma$ Integrale leitet man durch partielle Differentiation nach $\log x$ die vorhergehenden ab. Wir haben daher das Ergebnis:

*Die $\lambda$ Integrale einer Gruppe $\Gamma$ der Differentialgleichung* (13), *welche r Wurzelgruppe $g$ der determinierenden Gleichung gehören, teilen sich in Untergruppen, dass jeder $\gamma$-fachen Wurzel* $(\gamma = 1, 2, \ldots)$ *Untergruppe $\gamma^{\text{ter}}$ Stufe entspricht.*

Endlich betrachten wir den dem zuerst erwähnten diametral gegentehenden Specialfall, dass nämlich die sämtlichen $\lambda$ Integrale Gruppe $\Gamma$ eine einzige Untergruppe bilden, die mithin, da alle rale einer Untergruppe verschiedener Stufe sind, $\lambda^{\text{ter}}$ Stufe ist. zu $r_1 (\equiv \nu)$ gehörige Integral ist folglich in diesem Fall das e von der ersten Stufe. Nach einem Satz des Artikel 16 sind aber die Determinanten (wenn $\alpha \equiv r_\lambda$)

$$D_{\alpha\beta}, \quad D_{\beta\gamma}, \ldots, D_{\mu\nu}$$

ich $\neq 0$, und umgekehrt, wenn diese Determinanten von Null hieden sind, gehört zu keiner andern Wurzel als $r_1 \equiv \nu$ ein ral erster Stufe und bilden daher die sämtlichen $\lambda$ Integrale von e einzige Untergruppe.

Wir haben daher das Resultat:

*Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass sämt-Integrale einer Gruppe $\Gamma$ eine einzige Untergruppe bilden, bestehen , dass keine der Determinanten*

$$D_{\alpha\beta}, \quad D_{\beta\gamma}, \ldots, D_{\mu\nu},$$

$\equiv r_\lambda$, $\nu \equiv r_1$ *und* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$ *die sämtlichen von einander hiedenen Wurzeln der Gruppe $g$ sind, verschwindet.*

Hiermit haben wir zugleich — wie in Artikel 53 angekündigt e — die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass *dem der Integrale* (8) *oder* (8ª) Kap. VII *der Logarithmus thatsächbis zur höchstmöglichen Potenz, nämlich in $y_\alpha$* $(\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda)$ *bis* $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ *Potenz aufsteigt.* Denn wenn das Letztere der Fall ist, n ja die sämtlichen Integrale (8) Kap. VII eine einzige Unterpe und umgekehrt.

Dieser zuletzt erwähnte Specialfall, dass die ganze Gruppe $\Gamma$ aus einzigen Untergruppe besteht, tritt insbesondere dann ein, wenn $= r_2 = \cdots = r_\lambda$, d. h. wenn die ganze Wurzelgruppe $g$ aus einer gen $\lambda$-fachen Wurzel besteht.

## Kapitel X.

### Notwendigkeit der Bestimmtheitsgestalt der Differentialgleichung bei einer Stelle für bestimmtes Verhalten sämtlicher Integrale daselbst.

**70. Aufgabe und Gang der Lösung.** Die drei letzten Kapitel waren der Untersuchung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ gewidmet und führten zu dem Ergebnis, dass bei einer solchen stets ein Fundamentalsystem von sich bestimmt verhaltenden Integralen existiert. Wir können also — in etwas erweitertem Sinne des Wortes — sagen: *bei einer Stelle der Bestimmtheit verhalten sich sämtliche Integrale bestimmt*, was so zu verstehen ist, dass ein aus Integralen verschiedener Gruppen zusammengesetztes Integral sich linear und homogen durch mehrere Integrale ausdrücken lässt, deren jedes sich bei der betreffenden Stelle bestimmt verhält.

Erklärt sich jetzt nachträglich durch diese Erkenntnis schon die Bezeichnung eines Wertes von $x$, dessen zugehörige determinierende Gleichung den Grad $n$ hat, als *Stelle der Bestimmtheit*, so wird die Berechtigung dieses Namens völlig erwiesen sein, wenn wir nunmehr noch zeigen, *dass die Bestimmtheitsgestalt der Differentialgleichung bei einer Stelle $x = 0$ für das bestimmte Verhalten sämtlicher Integrale daselbst auch notwendig ist.* Wir setzen also voraus, die Differentialgleichung

$$P(x, y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0 \tag{1}$$

besitze $n$ linear unabhängige Integrale

$$u_1\, u_2 \ldots u_n \tag{2}$$

in der Gestalt ganzer Functionen von $\log x$, deren Coefficienten nach Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen sind. Von den Reihen eines und desselben Integrals $u$ können wir annehmen, dass sie nur solche Potenzen von $x$ enthalten, die sich um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden. Dies lässt sich ähnlich wie eine entsprechende Annahme in Artikel 5 und mit Hülfe der Sätze des Anhangs, Zu Kap. IV, insbesondere Satz 6, leicht begründen. Ferner setzen wir voraus, *dass die sämtlichen Integrale $u$ sich bei $x = 0$ bestimmt verhalten*, d. h. dass alle in ihnen auftretenden Reihen einen

Anfangsexponent mit endlichem absoluten Betrag haben. Aus diesen Voraussetzungen allein wird sich folgern lassen, dass $x=0$ Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (1) ist.

Zu dem Ende leiten wir aus dem gegebenen Fundamentalsystem (2) zunächst ein anderes ab, welches dadurch charakterisiert ist, dass nicht zwei Elemente zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten gehören. Sodann zeigen wir der Reihe nach, dass die Coefficienten von (1) bei $x=0$ eindeutig sein müssen, dass $x=0$ nicht wesentlich singulär sein kann, und endlich, dass $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit sein muss.

**71. Umwandlung des vorgelegten Fundamentalsystems.** In dem Fundamentalsystem $u_1\, u_2 \dots u_n$ stellen wir zunächst alle diejenigen Integrale zusammen, deren Reihen nur Potenzen von $x$ mit untereinander höchstens um ganze Zahlen verschiedenen Exponenten enthalten, also — um die frühere Bezeichnung wieder aufzunehmen — alle Integrale, die in dieselbe Gruppe gehören. Seien etwa

$$u_1\, u_2 \dots u_\lambda$$

sämtliche Integrale einer Gruppe aus $u_1\, u_2 \dots u_n$, sodass also die Exponenten aller Potenzen von $x$, die in diesen $\lambda$ Integralen auftreten, untereinander nur um ganze Zahlen oder Null verschieden sind, dagegen keines der $n-\lambda$ übrigen Integrale diese Eigenschaft teilt.

Jedes der Integrale $u_1\, u_2 \dots u_\lambda$ gehört nun zu einem bestimmten, an bestimmter Stelle stehenden Exponenten, den wir bezw. mit $s_1\, s_2 \dots s_\lambda$ bezeichnen wollen. Dabei kann man die Integrale $u_1\, u_2 \dots u_\lambda$ in dieser Folge bereits so geordnet denken, dass jedes Integral zu einem Exponenten gehört, dessen reeller Teil nicht grösser als beim vorhergehenden ist, und, wenn zwei aufeinanderfolgende Integrale zu demselben Exponenten gehören, dieser Exponent bei dem zweiten an mindestens ebenso hoher Stelle steht, wie bei dem ersten.

Sollten nun etwa $u_\lambda\; u_{\lambda-1} \dots u_{\lambda-\alpha}$ zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten $s_\lambda \equiv s_{\lambda-1} \equiv \dots \equiv s_{\lambda-\alpha}$ gehören, so kann man offenbar $\alpha$ Constanten

$$a_{\lambda-1}\;\; a_{\lambda-2} \dots a_{\lambda-\alpha}$$

so wählen, dass die Integrale

$$u_{\lambda-1} + a_{\lambda-1} u_\lambda,\;\; u_{\lambda-2} + a_{\lambda-2} u_\lambda, \dots,\; u_{\lambda-\alpha} + a_{\lambda-\alpha} u_\lambda$$

entweder überhaupt nicht mehr zu dem Exponenten $s_\lambda$ oder doch zu diesem an niedrigerer Stelle stehenden Exponenten gehören. Die $\lambda$ Integrale

$$(3) \qquad u_1\, u_2 \dots u_{\lambda-\alpha-1},\;\; u_{\lambda-\alpha} + a_{\lambda-\alpha} u_\lambda, \dots,\; u_{\lambda-1} + a_{\lambda-1} u_\lambda,\; u_\lambda,$$

welche wir nun zunächst an Stelle der Integrale $u_1\, u_2 \dots u_\lambda$ setzen, sind aber wieder linear unabhängig. Denn die Determinante dieser $\lambda$ Functionen lässt sich als Produkt aus der Determinante der $u_1\, u_2 \dots u_\lambda$ und der Determinante der Substitutionscoefficienten darstellen, welche letztere den Wert 1 hat. Die Determinante der Functionen (3) ist daher mit der Determinante der $u_1 \dots u_\lambda$ identisch und deshalb von Null verschieden.

$u_\lambda$ gehört also nun unter allen Integralen (3) zu dem Exponenten mit dem kleinsten reellen Teil, und dieser Exponent steht — falls noch andere Integrale zu demselben gehören — in $u_\lambda$ an höherer Stelle als in allen andern. Mit den $\lambda - 1$ Integralen

$$u_1\, u_2 \dots u_{\lambda-\alpha-1},\ u_{\lambda-\alpha} + a_{\lambda-\alpha} u_\lambda, \dots, u_{\lambda-1} + a_{\lambda-1} u_\lambda$$

können wir nun aber geradeso verfahren wie vorher mit den $\lambda$ Integralen $u_1\, u_2 \dots u_\lambda$, u. s. w., bis wir schliesslich diese Integrale durch die $\lambda$ anderen

$$(4) \qquad v_1\, v_2 \dots v_\lambda$$

ersetzt haben, von denen nicht zwei zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten gehören.

Die Integrale (4) sind aber ebenfalls linear unabhängig; denn ihre Determinante ist mit derjenigen der $u_1\, u_2 \dots u_\lambda$ identisch, weil die Gleichheit der Determinanten bei dem successiven Übergang von den $u$ zu den $v$ bei jedem einzelnen Schritt besteht.

Ebenso denken wir uns natürlich die andern Gruppen der $u$ umgewandelt und *können daher jetzt mit dem in Gruppen eingeteilten Fundamentalsystem*

$$(5) \qquad v_1\, v_2 \dots v_\lambda,\ v_{\lambda+1} \dots v_n$$

*weiter operieren, dessen Elemente bezw. zu den Exponenten $r_1\, r_2 \dots r_\lambda \dots r_n$ gehören mögen, und von denen nicht zwei zu demselben an gleicher Stelle stehenden $r$ gehören.*

Da also die Integrale (5) sich in Bezug auf die Zuordnung zu den Exponenten geradeso verhalten wie die Gruppenintegrale (8), ($8^a$), ($8^b$) in Kap. VII, und da nur aus dieser Zuordnung dort die Umlaufsrelationen (12) und (13) in Artikel 51 folgten, so gilt auch von dem Fundamentalsystem (5) hier der Satz: *Bei einem Umlauf um $x = 0$ geht jedes Integral $v_\alpha$ in eine lineare homogene Function von sich selbst und den in seiner Gruppe vorangehenden Integralen über, wobei der Coefficient von $v_\alpha$ selbst $\neq 0$ ist und den Wert hat*

$$\omega_\alpha = e^{2 r_\alpha \pi i}.$$

Wenn also $v_\alpha$ z. B. ein Element der Gruppe $v_1 v_2 \ldots v_\lambda$ ist, so lautet die Umlaufsrelation

$$(6) \qquad \overline{v}_\alpha \equiv \omega_{\alpha 1} v_1 + \omega_{\alpha 2} v_2 + \cdots + \omega_{\alpha, \alpha-1} v_{\alpha-1} + \omega_\alpha v_\alpha ,$$

wo die $\omega_\alpha$ auch $\omega_{\alpha 1}$, $\omega_{\alpha 2} \ldots \omega_{\alpha, \alpha-1}$ Constanten sind.

72. **Beweis, dass $x = 0$ höchstens ausserwesentlich singuläre Stelle ist**[1]. Wir beweisen jetzt, dass die Coefficienten der Differentialgleichung (1), welche bei $x = 0$ das Fundamentalsystem $v_1 v_2 \ldots v_n$ besitzt, in der Umgebung dieser Stelle eindeutig sind. Gleichzeitig wird sich aus dem bestimmten Verhalten jener Integrale ergeben, dass $x = 0$ höchstens ausserwesentlich singuläre Stelle ist.

Zu dem Ende bilden wir aus den Integralen $v$ und ihren $n$ ersten Ableitungen

$$\begin{matrix} v_1 & v_1' & \ldots & v_1^{(n)} \\ v_2 & v_2' & \ldots & v_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v_n & v_n' & \ldots & v_n^{(n)} \end{matrix}$$

durch Streichung der ersten, zweiten, ..., $(n+1)^{\text{ten}}$ Colonne die Determinanten

$$D_n,\ D_{n-1}, \ldots, D_1,\ D (\equiv D_0) .$$

Dann hat man nach Art. 26 (4) für die Coefficienten $p$ der Differentialgleichung (1) die Ausdrücke

$$(7) \qquad p_\nu = (-1)^\nu \frac{D_\nu}{D} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) .$$

Da in jeder der Determinanten $D_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ jedes Element eine ganze Function von $\log x$ ist, deren Coefficienten nach Entfernung des Faktors $x^{r_1}$ in der ersten, $x^{r_2}$ in der zweiten, u. s. w., $x^{r_n}$ in der $n^{\text{ten}}$ Zeile eindeutig sind und negative Potenzen von $x$ höchstens in endlicher Anzahl enthalten, so hat — nach Potenzen von $\log x$ entwickelt — jede dieser Determinanten die Form

$$(8) \qquad D_\nu \equiv x^{r_1 + r_2 + \cdots + r_n} [\chi_{\nu 0} + \chi_{\nu 1} \log x + \cdots + \chi_{\nu \sigma} \log^\sigma x] ,$$

wo $\chi_{\nu 0}\, \chi_{\nu 1} \ldots \chi_{\nu \sigma}$ wieder eindeutige Functionen von $x$ sind und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten.

Es müssen aber in (8) die Functionen $\chi_{\nu 1} \ldots \chi_{\nu \sigma}$ identisch Null sein, was sich folgendermassen erschliessen lässt. Beim Umlauf von $x$ um $x = 0$ ändert sich $v_\alpha$ gemäss der Relation (6). Für alle Ableitungen von $v_\alpha$ gilt aber die Identität

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866) 4. S. 139 ff.

$$(9)\qquad \overline{\frac{d^\varrho v_\alpha}{dx^\varrho}} = \frac{d^\varrho \overline{v_\alpha}}{dx^\varrho};$$

denn nach Art. 56 (6) kann man die Umlaufsrelation für $v_\alpha$ au
schreiben

$$\frac{1}{\omega_\alpha}\overline{v_\alpha} = v_\alpha + \frac{2\pi i}{1}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!}\frac{\partial^\sigma v_\alpha}{(\partial \log x)^\sigma},$$

wenn $\sigma$ der Grad von $v_\alpha$ in $\log x$ ist. Hiernach ist

$$(10)\quad \frac{d^\varrho}{dx^\varrho}\left(\frac{1}{\omega_\alpha}\overline{v_\alpha}\right) = \frac{d^\varrho v_\alpha}{dx^\varrho} + \frac{2\pi i}{1}\frac{d^\varrho}{dx^\varrho}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \log x}\right) + \cdots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!}\frac{d^\varrho}{dx^\varrho}\left(\frac{\partial^\sigma}{(\partial \log}\right.$$

Andererseits ist $\frac{d^\varrho v_\alpha}{dx^\varrho}$ wieder eine ganze Function von $\log x$,
Grad $\leqq \sigma$, und besitzt daher die Umlaufsrelation

$$(11)\quad \frac{1}{\omega_\alpha}\overline{\frac{d^\varrho v_\alpha}{dx^\varrho}} = \frac{d^\varrho v_\alpha}{dx^\varrho} + \frac{2\pi i}{1}\frac{\partial}{\partial \log x}\left(\frac{d^\varrho v_\alpha}{dx^\varrho}\right) + \cdots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!}\frac{\partial^\sigma}{(\partial \log x)^\sigma}\left(\right.$$

Da aber[1])

$$\frac{\partial^\tau}{(\partial \log x)^\tau}\left(\frac{d^\varrho v_\alpha}{dx^\varrho}\right) = \frac{d^\varrho}{dx^\varrho}\left(\frac{\partial^\tau v_\alpha}{(\partial \log x)^\tau}\right),$$

so sind die rechten Seiten von (10) und (11) einander gleich
somit ist (9) erwiesen. — Wenn also $x$ den Umlauf beschreib
tritt in $D_\nu$ an Stelle jedes Elementes eine lineare homogene V
dung der Elemente seiner Colonne, und die Coefficienten ders
sind nach (9) bei allen Elementen einer Zeile immer ein und d
ben. Es multipliciert sich daher $D_\nu$ bei dem Umlauf einfach m
Determinante der Coefficienten der Umlaufsrelationen der Int
$v_1\, v_2 \ldots v_n$. Diese hat aber nach (6) den Wert

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \ldots \omega_n = e^{2\pi i(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)},$$

Folglich ist

$$(12)\qquad \overline{D_\nu} = D_\nu\, e^{2\pi i(r_1 + \cdots + r_n)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (8), so ergiebt sich unmitt
die Richtigkeit der Behauptung, dass in (8)

$$\chi_{\nu 1} = \chi_{\nu 2} = \cdots = \chi_{\nu \sigma} = 0$$

sein muss. Denn da beim Umlauf von $x$ um $x = 0$ sich $x^{r_1 + \cdots}$
mit dem Faktor $e^{2\pi i(r_1 + \cdots + r_n)}$ multipliciert, muss nach (12)

---

1) S. Anhang.

$$\frac{D_\nu}{x^{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}}$$

in der Umgebung von $x = 0$ *eindeutig* sein. Hieraus folgt aber die *Eindeutigkeit* der Quotienten zweier $D_\nu$, d. h. der Coefficienten $p$ in (1).

Es wurde nun bei dieser Ableitung lediglich davon Gebrauch gemacht, dass

$$v_1 \; v_2 \ldots v_n$$

ein Fundamentalsystem bilden, von dem jedes Element $v_\alpha$ bei dem Umlauf sich mit einer von Null verschiedenen Constanten $\omega_\alpha$ multipliciert und um eine lineare homogene Function der ihm *vorangehenden* Integrale nur vermehrt. Demnach können wir das bis jetzt gefundene Resultat gleich allgemeiner dahin aussprechen:

*Sind $v_1 \; v_2 \ldots v_n$ $n$ linear unabhängige Functionen von $x$, deren jede, $v_\alpha$, bei einem Umlauf um $x = 0$ sich mit einer von Null verschiedenen Constanten multipliciert und ausserdem höchstens um eine lineare homogene Function der ihr vorangehenden Functionen $v_1 \; v_2 \ldots v_{\alpha-1}$ vermehrt, so bilden dieselben ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die bei $x = 0$ eindeutige Coefficienten hat*[1].

Da nun in unserem speziell vorliegenden Fall in den Quotienten (7) Zähler und Nenner höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten, kann man immer eine solche Potenz von $x$ herausnehmen, dass Zähler und Nenner für $x = 0$ einen von Null verschiedenen endlichen Wert annehmen und demgemäss dieser übrig bleibende Bruch wieder in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar ist. Multipliciert man also die ganze Gleichung noch mit einer geeigneten Potenz von $x$, so kann man alle negativen Potenzen von $x$ in den Coefficienten zum Wegfall bringen und die Gleichung in die Normalform bei $x = 0$ setzen

$$(13) \qquad x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind, die für $x = 0$ nicht sämtlich verschwinden. Daher ist jetzt bewiesen:

*Damit die sämtlichen Integrale der Differentialgleichung* (1) *sich bei $x = 0$ bestimmt verhalten, darf $x = 0$ höchstens ausserwesentlich singuläre Stelle sein.*

**73. Nachweis, dass $x = 0$ Stelle der Bestimmtheit ist.** Nachdem wir im vorigen Artikel erkannt haben, dass infolge unserer Voraussetzungen über das Fundamentalsystem (2) die Differentialgleichung

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 76 (1873) S. 242.

(1) bei $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, befinden wir uns auf der Basis der Untersuchung von Kap. I, II, III und des daran anschliessenden Kap. VIII. Nach dem letzteren (s. Art. 60) wissen wir aber, dass, wenn ein Integral $v_\alpha$ zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $r_\alpha$ gehört, $r_\alpha$ mindestens $\gamma$-fache Wurzel der determinierenden Gleichung sein muss. Nun ist das Fundamentalsystem $v_1 v_2 \ldots v_n$ so beschaffen, dass nicht zwei seiner Elemente zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten gehören, und wenn $\gamma$ Elemente zu demselben Exponenten gehören, eines von ihnen zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten gehört. Diese Exponenten sind bezw.

$$r_1\, r_2 \ldots r_n.$$

Also muss die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function von (1) durch

$$(r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_n)$$

teilbar, d. h. *mindestens* und — da sie nicht höheren Grades sein kann — *genau vom* $n^{\text{ten}}$ *Grade* sein.

In Gleichung (13) ist daher $\mathfrak{P}_0(0) \gtrless 0$, d. h. $x = 0$ ist Stelle der Bestimmtheit.

Hiermit haben wir die gewünschte Umkehrung bewiesen und den wichtigen Satz erhalten:

*Das notwendige und hinreichende Kriterium dafür, dass bei einer Stelle $x = 0$ die sämtlichen Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung sich bestimmt verhalten, besteht darin, dass die zu $x = 0$ gehörige determinierende Gleichung vom $n^{\text{ten}}$ Grad ist, oder — was dasselbe ist — dass die Differentialgleichung bei $x = 0$ in die Form*

$$x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{P}_n y = 0$$

*gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{P}_0\, \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind und $\mathfrak{P}_0(0) \gtrless 0$ ist.*

## Kapitel XI.

### Fundamentalgleichung.

**74. Aufgabe der folgenden Untersuchung.** Im Artikel 32 haben wir als Hauptaufgabe die Untersuchung der Integrale in der Umgebung der verschiedenartigen Werte von $x$ hingestellt. Diese Aufgabe haben wir bisher für die Stellen der Bestimmtheit gelöst, indem wir zeigten, wie man für die Umgebung einer solchen ein Fundamentalsystem von Integralen aufstellen kann. Unser Ausgangspunkt für die Ermittlung desselben war dabei der (s. Art. 5), dass wir, geführt durch die Gestalt der Differentialgleichung selbst, diese durch eine sich bestimmt verhaltende Reihe zu befriedigen versuchten. Dies gelang bei Stellen der Bestimmtheit immer, und wir konnten dann mittelst der Fuchs'schen Methode (s. Art. 46, 47) ein ganzes Fundamentalsystem gewinnen.

Jener Versuch erweist sich aber bei ausserwesentlich singulären Stellen, die nicht zugleich Stellen der Bestimmtheit sind, im allgemeinen als vergeblich, weil bei einer solchen — wenn überhaupt formal die Differentialgleichung befriedigende Reihen zu bilden sind — dieselben im allgemeinen divergieren (s. Art. 19). Selbst wenn aber der Ausnahmsfall eintritt, — von dem später eingehend die Rede sein wird, — dass eine solche Reihe convergiert, so können wir doch nicht $n$ linear unabhängige, sich bei der betreffenden Stelle bestimmt verhaltende Integrale finden, da dies ja nach dem vorigen Kapitel eine Stelle der Bestimmtheit erfordert. Es muss also schon bei einer ausserwesentlich singulären Stelle der Unbestimmtheit Integrale von anderer Gestalt geben, als die ist, welche uns bisher nur begegnete.

Das Gleiche gilt von den wesentlich singulären Stellen. Hier kommt aber sogar noch hinzu, dass wir gar nicht in der Lage sind, den oben erwähnten Versuch anzustellen, weil (s. Art. 5) in diesem Falle die Methode der unbestimmten Coefficienten — wenigstens bei Beschränkung auf elementare Hülfsmittel — stets versagt.

Die vorstehenden Ueberlegungen zeigen einmal, dass wir noch gar nicht wissen, in welcher Gestalt wir die Integrale bei einer Stelle der

Unbestimmtheit im allgemeinen zu suchen haben, und ferner, dass uns die bisher benutzte Methode bei der Untersuchung dieser Frage im Stich lässt. Unsere nächste Aufgabe ist daher die, festzustellen, *welche Gestalt im allgemeinen die Elemente eines in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit gültigen Fundamentalsystems haben.* Wir gelangen aber zur Lösung dieser Aufgabe, indem wir mittelst des Kreisfortsetzungsverfahrens (s. Kap. VI) zunächst untersuchen, wie sich *irgend ein* Fundamentalsystem beim Umlauf um die betreffende singuläre Stelle verhält, und dann nach *demjenigen* Fundamentalsystem fragen, dessen Elemente sich bei demselben Umlauf möglichst einfach verhalten. Aus diesem Verhalten lässt sich endlich die analytische Gestalt eines in der Umgebung der betreffenden singulären Stelle gültigen Fundamentalsystems erschliessen.

**75. Aufstellung der Fundamentalgleichung**[1]). Es sei $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit für die Differentialgleichung

$$P(x, y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0; \tag{1}$$

$x = 0$ soll aber nicht zu denjenigen vom Gebiet der Differentialgleichung ausgeschlossenen Stellen gehören, die nicht einmal eine Umgebung von endlicher Ausdehnung besitzen (s. Art. 3). Die Umgebung $U$ von $x = 0$ ist also, je nachdem diese Stelle ausserwesentlich oder wesentlich singulär, ein Kreis oder ein Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$ und von nicht unendlich kleiner Ausdehnung. Wir wollen auch in dem ersteren Falle aus später ersichtlichen Gründen den Mittelpunkt durch einen beliebig kleinen Kreis ausgeschnitten denken, sodass wir als Umgebung $U$ einer Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ stets einen *Kreisring* mit dem Mittelpunkt $x = 0$ ansehen. Was wir suchen, ist also die analytische Gestalt eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (1) innerhalb des Kreisringes $U$.

Wir wollen aber schon hier bemerken, dass alles Folgende auch gilt, wenn wir unter $x = 0$ eine ganz beliebige Stelle, nicht notwendig eine Stelle der Unbestimmtheit, und unter $U$ irgend einen Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$ verstehen, der keinen singulären Punkt enthält. Demnach kommt die folgende Untersuchung wesentlich darauf hinaus, dass wir nach der *analytischen Gestalt der Integrale in einem ringförmigen Gebiet* fragen. Während aber bei einer Stelle der Bestimmtheit $x = 0$, wie wir wissen, auch ein im Innern eines *Kreises* gültiges Fundamentalsystem existiert, ist es, wie wir sehen werden, für die Stellen der Unbestimmtheit charakteristisch, dass der Gültig-

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866) S. 131 ff.

keitsbereich eines *jeden* zugehörigen Fundamentalsystems ein *Kreisring* ist. Hierin findet dann die oben gemachte Festsetzung über die Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit ihre Begründung.

Es sei nun $x = x_0$ eine beliebige reguläre Stelle des Kreisringes $U$,

$$y_1\, y_2 \ldots y_n \tag{2}$$

ein für die Umgebung von $x_0$ definiertes reguläres Fundamentalsystem. Von $x_0$ aus beschreibe $x$ einen geschlossenen Umlauf um $x = 0$ innerhalb $U$, indem es etwa die Kreisperipherie um $x = 0$ als Mittelpunkt durchläuft. Dieser Weg ist nach Art. 44 eine zu $x = 0$ gehörige *Fundamentalschleife*, wenn $U$ die Umgebung von $x = 0$ bildet. Dabei möge das Fundamentalsystem (2) die Substitution

$$S = (\alpha_{ik}) \quad {\scriptstyle (i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)}$$

erleiden, sodass

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \alpha_{11} y_1 + \cdots + \alpha_{1n} y_n \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \bar{y}_n = \alpha_{n1} y_1 + \cdots + \alpha_{nn} y_n\,, \end{cases} \tag{3}$$

wo man die $\alpha_{ik}$ nach Art. 43 berechnen kann, allerdings im allgemeinen nur in Gestalt unendlicher Reihen. Die Determinante der Substitution $S$, die nach Art. 43 $\neq 0$, bezeichnen wir durch

$$A = |\alpha_{ik}|\,.$$

Wir wollten nun Integrale suchen, die sich bei dem gedachten Umlauf möglichst einfach verhalten. Die einfachste Art der Änderung, die ein Integral erfahren kann, ist aber die, dass es in eine lineare homogene Function nur von sich selbst übergeht, d. h. dass es sich nur mit einer Constanten multipliciert. Ein Integral $\eta$, das diese Eigenschaft besitzt, also die Gleichung

$$\bar{\eta} = \omega\, \eta \tag{4}$$

erfüllt, wo $\omega$ eine Constante, ist wie jedes Integral in der Form

$$\eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{5}$$

enthalten, wo die $c$ von $x$ unabhängige Grössen sind. Damit (5) die Eigenschaft (4) hat, muss also

$$c_1 \bar{y}_1 + \cdots + c_n \bar{y}_n = \omega (c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n)$$

sein, d. h. unter Berücksichtigung von (3)

$$\begin{aligned} c_1(\alpha_{11} y_1 + \cdots + \alpha_{1n} y_n) + \cdots + c_n (\alpha_{n1} y_1 + \cdots + \alpha_{nn} y_n) \\ = \omega (c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Da aber $y_1\, y_2 \ldots y_n$ linear unabhängig sind, müssen in (6), wenn Alles auf eine Seite gebracht wird, die Coefficienten der einzelnen

$y$ für sich verschwinden, sodass wir für $c_1 c_2 \dots c_n$ die $n$ linearen homogenen Gleichungen erhalten

$$(7)\quad \begin{cases} (\alpha_{11}-\omega)c_1 + \alpha_{21}c_2 + \dots + \alpha_{n1}c_n = 0 \\ \alpha_{12}c_1 + (\alpha_{22}-\omega)c_2 + \dots + \alpha_{n2}c_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{1n}c_1 + \alpha_{2n}c_2 + \dots + (\alpha_{nn}-\omega)c_n = 0. \end{cases}$$

Diese ergeben aber dann und nur dann für die $c$ ein anderes Wertsystem als das triviale, bei dem alle $c = 0$ sind, wenn die Determinante des Gleichungssystems (7) verschwindet, d. h. wenn $\omega$ eine Wurzel der Gleichung

$$(8)\qquad \Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\omega, & \alpha_{21}, & \dots, & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}-\omega, & \dots, & \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{1n}, & \alpha_{2n}, & \dots, & \alpha_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

ist. Diese Gleichung heisst *die zu dem betrachteten Umlauf gehörige Fundamentalgleichung.* Wenn der Umlauf eine Fundamentalschleife ist, können wir auch sagen: *die zu der Stelle $x = 0$ gehörige Fundamentalgleichung.*

Das Ergebnis des gegenwärtigen Artikels ist daher dieses:

*Damit bei einem beliebigen Umlauf ein Integral* (5) *sich nur mit einer Constanten $\omega$ multipliciere, muss $\omega$ eine Wurzel der zu diesem Umlauf gehörigen Fundamentalgleichung* (8) *sein, worauf sich die Constanten des Integrals* (5) *aus dem Gleichungssystem* (7) *ergeben.*

**76. Invarianz der Linearteiler der Fundamentalgleichung**[1]**.** Bevor wir uns aber an die Verwertung der Fundamentalgleichung für denjenigen Zweck, zu dem sie aufgestellt wurde, begeben (Kap. XII), müssen wir uns mit den Eigenschaften dieser wichtigen Gleichung noch näher bekannt machen.

Wir gelangten von dem für die beliebige Stelle $x_0$ in $U$ beliebig fixierten Fundamentalsystem (2) ausgehend zu der Gleichung (8). Für die spätere Nutzanwendung ist es zunächst wichtig, die *Unabhängigkeit der Fundamentalgleichung von dem zu Grund gelegten Fundamentalsystem* darzuthun, d. h. zu zeigen, dass man zu derselben Gleichung gelangt beim Ausgang von einem ganz beliebigen anderen Fundamentalsystem

$$(2^a)\qquad z_1, z_2, \dots, z_n,$$

1) Vergl. zu diesem und dem folgenden Artikel Hamburger, Crelles Journ Bd. 76. (1873). S. 115 ff.

*sobald nur die beide Male von $x$ beschriebenen Umläufe nicht wesentlich von einander verschieden sind*, d. h. genau dieselben singulären Punkte einschliessen.

Ist dies nämlich der Fall, so können wir den zweiten Umlauf, ohne sein Ergebnis zu ändern (s. Kap. VI), so umgestalten, dass er sich zusammensetzt aus einem Weg von seinem Ausgangspunkt $x_1$, der im Gültigkeitsbereich der Integrale $z_1\, z_2 \ldots z_n$ liegt, nach $x_0$, aus dem Kreisumlauf von $x_0$ aus innerhalb $U$ und aus demselben Weg wie vorher von $x_0$ nach $x_1$ zurück. Es sei

$$(9)\qquad \begin{cases} z_1 = \gamma_{11} y_1 + \cdots + \gamma_{1n} y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ z_n = \gamma_{n1} y_1 + \cdots + \gamma_{nn} y_n \end{cases}$$

der bei dem Weg von $x_1$ nach $x_0$ erzielte Ausdruck der $z$ durch die $y$. Die Werte der Coefficienten $\gamma_{ik}$ werden dabei geradeso bestimmt wie im Kap. VI, auch wenn $z_1\, z_2 \ldots z_n$ nicht ein für die Umgebung einer regulären Stelle definiertes Fundamentalsystem ist, indem man $z_1 \ldots z_n$ zuerst nach Formel (10) Art. 43 durch ein in der Umgebung von $x_1$ gültiges reguläres Fundamentalsystem ausdrückt und dann wie dort fortfährt. Da $z_1\, z_2 \ldots z_n$ ein Fundamentalsystem bilden, ist auch umgekehrt $y_1 \ldots y_n$ durch $z_1 \ldots z_n$ ausdrückbar und daher auch hier

$$|\gamma_{ik}| = C \neq 0.$$

Bei dem ganzen Umlauf von $x_1$ aus möge nun das Fundamentalsystem ($2^a$) übergehen in

$$(3^a)\qquad \begin{cases} \bar z_1 = \beta_{11} z_1 + \cdots + \beta_{1n} z_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar z_n = \beta_{n1} z_1 + \cdots + \beta_{nn} z_n , \end{cases}$$

wo

$$|\beta_{ik}| = B \neq 0,$$

sodass die aus dem Fundamentalsystem ($2^a$) entstehende Fundamentalgleichung die Gestalt

$$(8^a)\qquad B(\omega) \quad \begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega, & \beta_{21} & ,\ldots, & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & , \beta_{22} - \omega & ,\ldots, & \beta_{n2} \\ \cdot & \cdot & ,\ldots, & \cdot \\ \beta_{1n} & , \beta_{2n} & ,\ldots, & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

erhält.

Nach den vorangehenden Erörterungen über die beiden Umläufe von $x_0$ und $x_1$ aus besteht nun zwischen den Substitutionen

$$(\alpha_{ik}), \quad (\beta_{ik}), \quad (\gamma_{ik}),$$

wenn noch mit $(\gamma_{ik})^{-1}$ die zu $(\gamma_{ik})$ inverse Substitution bezeichnet wird, die Identität

$$(\beta_{ik}) \equiv (\gamma_{ik})(\alpha_{ik})(\gamma_{ik})^{-1}$$

oder, wenn beiderseits noch die Substitution $(\gamma_{ik})$ ausgeführt wird,

$$(10) \qquad (\beta_{ik})(\gamma_{ik}) \equiv (\gamma_{ik})(\alpha_{ik}).$$

Bezeichnen wir die so entstehende Substitution mit $(\delta_{ik})$

$$(\delta_{ik}) \equiv (\beta_{ik})(\gamma_{ik}) \equiv (\gamma_{ik})(\alpha_{ik}),$$

so ist also, da bei Composition zweier Substitutionen immer die Zeilen der ersten mit den Colonnen der zweiten componiert werden,

$$(11) \qquad \delta_{ik} \equiv \beta_{i1}\gamma_{1k} + \beta_{i2}\gamma_{2k} + \cdots + \beta_{in}\gamma_{nk} \equiv \gamma_{i1}\alpha_{1k} + \cdots + \gamma_{in}\alpha_{nk}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Bildet man jetzt das Produkt der Determinanten $C$ und $A(\omega)$ durch Composition der Zeilen, andererseits das Produkt von $B(\omega)$ und $C$ durch Composition der Colonnen, so erhält man zufolge (11) dasselbe Resultat, nämlich

$$(12) \qquad C.A(\omega) \equiv B(\omega).C \equiv D(\omega),$$

wo

$$(13) \qquad D(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \delta_{11} - \gamma_{11}\omega, & \ldots, & \delta_{1n} - \gamma_{1n}\omega \\ . & \ldots & . \\ \delta_{n1} - \gamma_{n1}\omega, & \ldots, & \delta_{nn} - \gamma_{nn}\omega \end{vmatrix}.$$

Demnach ist für jeden Wert von $\omega$

$$A(\omega) = B(\omega),$$

d. h. die beiden Fundamentalgleichungen (8) und ($8^a$) stimmen in ihren Coefficienten und folglich in ihren Wurzeln oder Linearteilern überein.

Wir haben also zunächst das Resultat:

*Die Linearteiler der zu einem bestimmten Umlauf gehörigen Fundamentalgleichung sind von der Wahl des zu ihrer Bildung benutzten Fundamentalsystems unabhängig.*

**77. Invarianz der Elementarteiler der Fundamentalgleichung.** Wir können aber noch eine erheblich weiter gehende Folgerung aus den Identitäten (12) ziehen.

Streicht man in einer Determinante $n^{\text{ten}}$ Grades $\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen, so entsteht eine *Unterdeterminante* $\nu^{\text{ter}}$ *Stufe*, die $(n-\nu)^2$ Elemente enthält. Solcher Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe kann man $\binom{n}{\nu}^2 \equiv \mu^2$ bilden. Diese Unterdeterminanten wollen wir

$$\left.\begin{array}{llll} \text{bei} & A(\omega) & \text{mit} & a_{ik} \\ \text{,,} & B(\omega) & \text{,,} & b_{ik} \\ \text{,,} & C & \text{,,} & c_{ik} \\ \text{,,} & D(\omega) & \text{,,} & d_{ik} \end{array}\right\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

bezeichnen, wo ein bestimmtes Wertenpaar von $i$ und $k$ andeutet, dass die betreffende Unterdeterminante durch Streichung einer bestimmten Zeilencombination und einer bestimmten Colonnencombination aus der zugehörigen Determinante $n^{\text{ten}}$ Grades entsteht.

Nach einem Satz der Determinantentheorie [1]) folgt dann aus (12) und aus der Art, wie die Determinantenmultiplicationen ausgeführt wurden, einerseits

$$d_{ik} = c_{i1}a_{k1} + c_{i2}a_{k2} + \cdots + c_{i\mu}a_{k\mu}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

andererseits

$$d_{ik} = b_{1i}c_{1k} + b_{2i}c_{2k} + \cdots + b_{\mu i}c_{\mu k},$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

also

$$(14) \qquad c_{i1}a_{k1} + \cdots + c_{i\mu}a_{k\mu} = b_{1i}c_{1k} + \cdots + b_{\mu i}c_{\mu k}.$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

Die $\mu^2$ Gleichungen (14) kann man nun sowohl benutzen, um die auf der linken Seite stehenden $a_{ik}$ durch die rechts stehenden $b_{ik}$, als auch umgekehrt diese durch jene auszudrücken. Giebt man nämlich $k$ irgend einen festen Wert und $i$ die Werte $1, 2, \ldots \mu$, so hat man $\mu$ Gleichungen für die jetzt als Unbekannte zu betrachtenden Grössen

$$a_{k1} \; a_{k2} \; \ldots \; a_{k\mu}$$

links, während rechts alle $\mu^2$ $b_{ik}$ auftreten. Die Determinante des Gleichungssystems links ist

$$|c_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, \mu),$$

d. h. die Determinante des Systems der $\mu^2$ Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $C$. Diese Determinante hat aber den Wert[2])

$$|c_{ik}| = C^{\binom{n-1}{\nu}}$$

und ist daher $\neq 0$. Da das Gleiche für jeden Wert von $k$ gilt, so drücken jene Gleichungen in der That sämtliche $\mu^2$ $a_{ik}$ linear und homogen durch die $b_{ik}$ aus. — Benutzt man die Gleichungen (14) um-

---

1) S. Anhang.

2) S. Baltzer, Theorie u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 7. 6. S. 68.

gekehrt, so erscheint rechts wieder jedesmal $|c_{ik}|$ als Determinante, und die $b_{ik}$ werden linear und homogen durch die $a_{ik}$ ausgedrückt.

Hieraus ziehen wir den Schluss: *Wenn sämtliche Unterdeterminanten $a_{ik}$ durch einen Linearteiler $\omega-\omega_1$ von $A(\omega)$ teilbar sind, so sind auch sämtliche $b_{ik}$ durch diesen teilbar, und umgekehrt. Wenn $(\omega-\omega_1)^{\lambda_\nu}$ die höchste Potenz des Linearteilers ist, welche noch in allen $a_{ik}$ enthalten ist, so ist eben diese auch die höchste in allen $b_{ik}$ noch enthaltene Potenz und umgekehrt.*

Nun hat man folgende Bezeichnung[1]) eingeführt: Sei $(\omega-\omega_1)^\lambda$ die höchste Potenz von $\omega-\omega_1$, welche in $A(\omega)$ selbst enthalten ist, $(\omega-\omega_1)^{\lambda_1}$ die höchste noch in allen Unterdeterminanten $1^{\text{ter}}$ Stufe von $A(\omega)$ enthaltene Potenz, $(\omega-\omega_1)^{\lambda_2}$ die höchste in allen Unterdeterminanten $2^{\text{ter}}$ Stufe, u. s. w. endlich $(\omega-\omega_1)^{\lambda_{\varrho-1}}$ die höchste Potenz von $\omega-\omega_1$, welche in allen Unterdeterminanten $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Stufe von $A(\omega)$ enthalten ist, während die Unterdeterminanten $\varrho^{\text{ter}}$ Stufe nicht mehr sämtlich durch $\omega-\omega_1$ teilbar sind. Dann nennt man

$$(\omega-\omega_1)^{\lambda-\lambda_1},\quad (\omega-\omega_1)^{\lambda_1-\lambda_2},\ \ldots,\ (\omega-\omega_1)^{\lambda_{\varrho-1}}$$

*die $\varrho$ Elementarteiler der Determinante $A(\omega)$, in welche die $\lambda^{\text{te}}$ Potenz des $\lambda$-fachen Linearteilers $\omega-\omega_1$ gespalten ist.* Denn es ist ja

$$(15)\qquad (\omega-\omega_1)^\lambda = (\omega-\omega_1)^{\lambda-\lambda_1}.(\omega-\omega_1)^{\lambda_1-\lambda_2}\ldots(\omega-\omega_1)^{\lambda_{\varrho-1}}.$$

Mit Hülfe dieser Terminologie können wir nun das Resultat dieses Artikels, welches dasjenige des vorigen mitumfasst, auch dahin aussprechen:

*Die Zerlegung der zu einem bestimmten Umlauf gehörigen Fundamentalgleichung in Elementarteiler ist unabhängig von dem zu ihrer Bildung benutzten Fundamentalsystem.*

**78. Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems (7).** Aus dem vorstehenden Resultat wollen wir noch eine Folgerung ziehen in Bezug auf den Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems (7), welches uns zu der Fundamentalgleichung führte, und das wir zur Berechnung der $c_1\ldots c_n$, d. h. zur Berechnung des Integrals (5) mit der Eigenschaft (4) brauchen, wenn für $\omega$ eine Wurzel der Fundamentalgleichung eingesetzt wird.

Ein System linearer homogener Gleichungen heisst bekanntlich[2]) einfach unbestimmt, wenn seine Determinante verschwindet, ohne dass alle ihre Unterdeterminanten erster Stufe verschwinden, zweifach

1) Weierstrass, Monatsberichte der Berliner Akademie 1868. S. 310 ff.
2) S. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. § 8. 2. S. 72 ff.

as man not very well a...

unbestimmt, wenn alle Unterdeterminanten erster Stufe verschwinden, aber nicht alle zweiter Stufe u. s. w., weil sich alsdann die sämtlichen Unbekannten des Systems bezw. durch eine, zwei, u. s. w. willkürlich bleibende von ihnen linear und homogen ausdrücken. Nach dem vorangehenden Artikel können wir nun sagen:

*Der Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems* (7), *wenn für* $\omega$ *eine Wurzel der Fundamentalgleichung eingesetzt wird, ist unabhängig von dem zu seiner Bildung benutzten Fundamentalsystem.*

Wenn nun für eine Wurzel $\omega = \omega_1$ der Fundamentalgleichung zuerst die Unterdeterminanten $\varrho^{\text{ter}}$ Stufe nicht sämtlich verschwinden, so ist also das Gleichungssystem (7) für $\omega = \omega_1$ $\varrho$-fach unbestimmt. Andererseits ist dann nach (15) $\varrho$ die Anzahl der zu dem Linearteiler $\omega - \omega_1$ gehörigen Elementarteiler. Wir können also weiter aussagen:

*Der Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems* (7), *wenn für* $\omega$ *eine Wurzel der Fundamentalgleichung gesetzt wird, ist identisch mit der Anzahl der dieser Wurzel entsprechenden Elementarteiler.*

**79. Fundamentalgleichung für eine Stelle der Bestimmtheit und ihre Beziehung zur determinierenden Gleichung.** Es wird dazu dienen, uns mit der Fundamentalgleichung noch vertrauter zu machen, wenn wir dieselbe für eine solche Stelle bilden, in deren Umgebung wir bereits ein Fundamentalsystem von Integralen besitzen, nämlich für eine Stelle der Bestimmtheit. Zugleich wird dabei die sich aufdrängende Frage, welche Beziehung zwischen der Fundamentalgleichung und der determinierenden Gleichung besteht, ihre Beantwortung finden.

Es sei also $x = 0$ jetzt eine Stelle der Bestimmtheit der Differentialgleichung (1). Zur Bildung der zugehörigen Fundamentalgleichung können wir nach Artikel 76, 77 das für die Umgebung eben dieser Stelle definierte Fundamentalsystem benutzen, welches nach Kap. IX in Untergruppen eingeteilt ist. Die letzteren wollen wir in der modificierten Gestalt des Artikel 68 voraussetzen, wobei $\omega_1, \omega_2, \ldots$ die schon im Artikel 51 eingeführte Bedeutung haben

$$\omega_\alpha = e^{2 r_\alpha \pi i} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \,, \tag{16}$$

sodass allen Wurzeln $r$ derselben Gruppe ein und dasselbe $\omega$ entspricht. Dann lautet das Coefficientensystem $(\alpha_{ik})$ (s. Gl. (3)) für diese spezielle Wahl des Fundamentalsystems $y_1 \ldots y_n$ derart, dass die Elemente der Hauptdiagonale $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sind, links von jedem $\omega$ 1 steht, ausser wenn das betreffende $\omega$ von einem Integral erster Stufe herrührt, alle übrigen Elemente aber den Wert Null haben. Hiernach wird die Fundamentalgleichung

$$
(17)\qquad
\left|\begin{array}{cccccc}
|\omega_1-\omega| & & & & & \\
& |\omega_1-\omega| & & & & \\
& & \ddots & & & \\
& & & \left|\begin{array}{cc}\omega_1-\omega, & 0\\ 1\ , & \omega_1-\omega\end{array}\right| & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & \left|\begin{array}{ccc}\omega_1-\omega, & 0\ , & 0\\ 1\ , & \omega_1-\omega, & 0\\ 0\ , & 1\ , & \omega_1-\omega\end{array}\right| \\
& & & & & \qquad\ddots
\end{array}\right| =
$$

wobei alle ausserhalb der durch besondere (nur zur Anschaulichkeit dienende) Linien eingerahmten Hauptunterdeterminanten stehenden Elemente Null sind und die eingerahmten Determinanten, soweit sie $\omega_1 - \omega$ in der Hauptdiagonale enthalten, sich zusammensetzen aus

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mu_0$ | Determinanten | ersten | Grades, |
| $\mu_1$ | " | zweiten | " , |
| . | . | . | . , |
| $\mu_l$ | " | $(l+1)^{\text{ten}}$ | " , |

entsprechend den einzelnen Untergruppen erster, zweiter, ..., $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe (s. Art. 67). Die dann folgenden eingerahmten Hauptunterdeterminanten in (17) sind entsprechend mit den von $\omega_1$ verschiedenen Grössen $\omega_\alpha$ gebildet.

Da hiernach die linke Seite der Fundamentalgleichung (17) das Produkt der eingerahmten Hauptunterdeterminanten ist und demnach den Wert hat

$$
(18)\qquad \Delta(\omega) = (\omega_1-\omega)(\omega_2-\omega)\ldots(\omega_n-\omega),
$$

so sind die Zahlen $\omega_\alpha$ die Wurzeln der Fundamentalgleichung. Wir haben daher zunächst das Resultat:

*Bei einer Stelle der Bestimmtheit, deren determinierende Gleichung die Wurzeln $r_1\, r_2 \ldots r_n$ besitzt, sind*

$$
\omega_\alpha = e^{2 r_\alpha \pi i} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)
$$

*die Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung. Einer Wurzelgruppe $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ der ersteren und demgemäss einer Gruppe von $\lambda$ Integralen des zugehörigen Fundamentalsystems entspricht daher ein $\lambda$-facher Linearteiler der Fundamentalgleichung.*

**80. Beziehung zwischen den Integraluntergruppen bei einer Stelle der Bestimmtheit und den Elementarteilern der Fundamentalgleichung**[1]). Wie wir im vorigen Artikel gesehen haben, dass den Integral*gruppen* eines Fundamentalsystems bei einer Stelle der Bestimmtheit die *Linear*teiler der Fundamentalgleichung entsprechen, können wir uns nunmehr noch davon überzeugen, dass den Integral*untergruppen* die *Elementar*teiler entsprechen in der Weise, dass der Anzahl der Untergruppen einer Gruppe, die einem Linearteiler $\omega_1 - \omega$ entspricht, die gleiche Anzahl von Elementarteilern, in die $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ zerfällt, und jeder Untergruppe von bestimmter Stufe ein Elementarteiler von gleichem Grade gegenübersteht.

Zu dem Ende erinnern wir uns einerseits daran, dass die eingerahmten Hauptunterdeterminanten in (17) nach Zahl und Grad den Untergruppen nach Zahl und Stufe entsprechen. Andererseits werden wir zeigen, dass jede dieser Unterdeterminanten zu einem Elementarteiler gleichen Grades führt, womit der Beweis unserer Behauptung dann erbracht ist.

Wir erhalten aus der Determinante (17) Unterdeterminanten $\nu^{\text{tor}}$ Stufe, wenn wir $\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen streichen. Zunächst ist leicht zu sehen, dass, wenn bei diesen Streichungen eines der eingerahmten Quadrate in ein Rechteck übergeht, die entstehende Unterdeterminante $\nu^{\text{tor}}$ Stufe identisch Null ist. Denkt man sich nämlich alsdann das Rechteck durch geeignete Zeilen- und Colonnen-Vertauschungen etwa in die linke obere Ecke der ganzen Determinante gerückt, so steht unter, bezw. rechts neben diesem Rechteck ein anderes Rechteck, dessen Elemente sämtlich Null sind und bei dem die Zahl der Zeilen und Colonnen zusammen $> n - \nu$, d. h. grösser als die Ordnung der Determinante, ist. Die betreffende Unterdeterminante $\nu^{\text{tor}}$ Stufe hat demnach den Wert Null[2]).

Um die Elementarteiler der Determinante (17) aufzusuchen, brauchen wir daher nur solche Unterdeterminanten derselben in's Auge zu fassen, bei denen nach den Zeilen- und Colonnenstreichungen innerhalb der Einrahmungen immer noch quadratische Systeme stehen, mit andern Worten, bei denen nur solche Reihenpaare (Zeile und Colonne) gestrichen sind, die sich innerhalb der eingerahmten Hauptunterdeterminanten kreuzen. Die höchste Potenz von $\omega_1 - \omega$, welche in *sämtlichen* Unterdeterminanten $\nu^{\text{tor}}$ Stufe enthalten ist, finden wir,

1) Vergl. Sauvage, Annales de l'École normale supérieure, 3me Série, t. 8. (1891). S. 312 ff.

2) Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 4. 2. S. 33.

wenn wir diejenige Unterdeterminante $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von (17) aufsuchen, die nicht identisch Null ist und den Faktor $\omega_1 - \omega$ in möglichst niedriger Potenz enthält. Betrachtet man aber eine der eingerahmten Hauptunterdeterminanten für sich

$$\begin{vmatrix} \omega_1-\omega, & 0 & 0 & \ldots, & 0, & 0 \\ 1 & , \omega_1-\omega, & 0 & \ldots, & 0, & 0 \\ 0 & , \quad 1 & , \omega_1-\omega, & \ldots, & 0, & 0 \\ . & . & . & \ldots, & . & . \\ 0 & , \quad 0 & , \quad 0 & \ldots, & 1, & \omega_1-\omega \end{vmatrix},$$

so erkennt man, dass durch Streichung der ersten Zeile und letzten Colonne diese Determinante den Wert 1 erhält, der Grad von $\omega_1 - \omega$ also um möglichst viel erniedrigt wird. Nimmt man also diese Streichung bei $\nu$ eingerahmten Hauptunterdeterminanten möglichst hoher Grade vor, so erhält man eine Unterdeterminante $\nu^{\text{ter}}$ Stufe, die nicht identisch Null ist und den Faktor $\omega_1 - \omega$ in möglichst niedriger Potenz, etwa $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu}$, enthält. Alle andern Unterdeterminanten enthalten diesen Faktor in gleicher oder höherer Potenz; also ist $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu}$ die höchste Potenz von $\omega_1 - \omega$, welche in *sämtlichen* Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe als Faktor enthalten ist. Auf diese Weise findet man die gemeinschaftlichen Faktoren

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1}, \quad (\omega_1 - \omega)^{\lambda_2}, \ldots$$

aller Unterdeterminanten bezw. erster, zweiter u. s. w. Stufe. Hat man endlich bei sämtlichen $\nu_0$ Hauptunterdeterminanten, die $\omega_1 - \omega$ in der Hauptdiagonale haben, diese Streichung vorgenommen, so erhält man daher eine Unterdeterminante $\nu_0^{\text{ter}}$ Stufe von $A(\omega)$ in (17), die gar nicht mehr durch $\omega_1 - \omega$ teilbar ist; d. h. $\lambda_{\nu_0}$ ist Null. Die Differenzen der Zahlen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_0}$ $(= 0)$

$$\lambda - \lambda_1, \quad \lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_0 - 1}$$

sind demnach die Grade der Elementarteiler von $A(\omega)$, welche zu dem $\lambda$-fachen Linearteiler $(\omega_1 - \omega)^{\lambda}$ gehören.

Andererseits entsteht aus $A(\omega)$, welches durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda}$ teilbar ist, nach dem Obigen durch Streichung der ersten Zeile und letzten Colonne in einer Hauptunterdeterminante höchsten Grades eine Unterdeterminante erster Stufe, welche nur noch durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1}$ teilbar ist. Durch diese Streichung hat die betreffende Hauptunterdeterminante also den Faktor $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \lambda_1}$ verloren und war somit vorher vom Grade $\lambda - \lambda_1$, u. s. w. Auf diese Weise ergiebt sich, dass die Zahlen

$$\lambda - \lambda_1, \quad \lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_0 - 1}$$

auch die Grade der einzeln eingerahmten Hauptunterdeterminanten und damit die Stufenzahl der einzelnen Untergruppen der Gruppe $\Gamma$ liefern.

Wir haben daher die ausgesprochene Behauptung erwiesen:

*Bei einer Stelle der Bestimmtheit entspricht die Zerlegung einer dem $\lambda$-fachen Linearteiler $\omega_1 - \omega$ der Fundamentalgleichung zugeordneten Integralgruppe in Untergruppen nach Zahl und Stufe der letzteren der Zerfällung von $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ in Elementarteiler nach Zahl und Grad derselben.*

## Kapitel XII.

### Die Integrale in einem Kreisring.

**81. Die Integrale bei Verschiedenheit sämtlicher Wurzeln der Fundamentalgleichung**[1]). Wie wir bei Stellen der Bestimmtheit in einem kreisförmigen Gebiet mittelst Recursionsformel und determinierender Gleichung ein Fundamentalsystem von Integralen wirklich aufstellen konnten, so wollen wir nun mit Hülfe der Fundamentalgleichung wenigstens die analytische Gestalt der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit und überhaupt in einem Kreisring ermitteln.

Es sei $x = 0$ der Mittelpunkt eines Kreisringes $U$, dessen Fläche von singulären Punkten der Differentialgleichung

(1) $$P(x,y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

frei ist. Zu einem Umlauf auf einem innerhalb $U$ verlaufenden, den Begrenzungskreisen von $U$ concentrischen Kreise gehöre die Fundamentalgleichung

(2) $$A(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{1n} & \ldots, & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Ist nun $\omega = \omega_1$ eine Wurzel dieser Gleichung, so existiert mindestens ein dem Gleichungssystem (voriges Kap., (7))

(3) $$\begin{cases} (\alpha_{11} - \omega_1) c_1 + \cdots + \alpha_{n1} c_n = 0 \\ \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \alpha_{1n} c_1 + \cdots + (\alpha_{nn} - \omega_1) c_n = 0 \end{cases}$$

genügendes System von Zahlen $c_1\ c_2 \ldots c_n$, die nicht sämtlich Null sind, mithin, wenn $y_1 \ldots y_n$ irgend ein in der Umgebung eines in $U$ gelegenen, also regulären Punktes $x_0$ definiertes Fundamentalsystem bedeuten, ein Integral $\eta_1$ der Gleichung (1)

---

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866) S. 134 ff.

(4) $$\eta_1 \equiv c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n,$$
dessen Umlaufsrelation bei dem betrachteten Weg
(5) $$\bar{\eta}_1 \equiv \omega_1 \eta_1$$
lautet.

Die analytische Gestalt eines Integrals mit dieser Umlaufsrelation ist leicht aus der letzteren abzuleiten. Setzt man

(6) $$r_1 \equiv \frac{1}{2\pi i} \log \omega_1,$$

unter $r_1$ einen beliebigen der unendlich vielen, aber nur um ganze Zahlen verschiedenen Werte der rechten Seite von (6) verstehend, so multipliciert sich die Function

$$x^{r_1}$$

bei dem Umlauf, der ja den Punkt $x = 0$ einschliesst, wie $\eta_1$ nur mit der Constanten $\omega_1$. Der Quotient

$$\frac{\eta_1}{x^{r_1}}$$

ist daher eine innerhalb $U$ eindeutige Function. Da aber $U$ nur aus regulären Punkten besteht, so ist $\eta_1$ innerhalb $U$ auch allenthalben endlich, stetig und besitzt in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung. Das Gleiche gilt von $x^{r_1}$, folglich von dem Quotienten, der überdies eindeutig ist. Der letztere ist also nach dem Laurent'schen Satz durch eine innerhalb des Ringes $U$ convergente Reihe darstellbar, die nur ganze Potenzen von $x$, aber im allgemeinen unendlich viele Potenzen mit negativem Exponenten enthält,

$$\frac{\eta_1}{x^{r_1}} = \varphi_1(x).$$

*Das Integral $\eta_1$ hat also innerhalb $U$ die analytische Gestalt*

(7) $$\eta_1 \equiv x^{r_1} \varphi_1(x),$$

*wo $r_1 \equiv \frac{1}{2\pi i} \log \omega_1$, $\varphi_1(x)$ eine innerhalb $U$ eindeutige Function mit im allgemeinen unendlich vielen negativen Potenzen ist.*

Besitzt $\varphi_1$ wirklich unendlich viele negative Potenzen, so müssen wir sagen, *die Reihe $\eta_1$ verhalte sich in dem Kreisring um $x = 0$*, bezw. — wenn dieser die Umgebung von $x = 0$ darstellt — *in der Umgebung von $x = 0$*, oder kurz, *bei $x = 0$*, oder endlich, alle Fälle zusammenfassend, *in Bezug auf $x = 0$ unbestimmt.*

Sind nun die $n$ Wurzeln der Fundamentalgleichung (2)

$$\omega_1 \;\; \omega_2 \ldots \omega_n$$

sämtlich von einander verschieden, so erhalten wir auf diese Art $n$ Integrale

(8) $$\eta_1 = x^{r_1}\varphi_1(x), \quad \eta_2 = x^{r_2}\varphi_2(x), \ldots, \eta_n = x^{r_n}\varphi_n(x),$$

wo

(9) $$r_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\log\omega_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

und $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ innerhalb $U$ eindeutige Functionen sind. Diese $n$ Integrale sind aber linear unabhängig. Denn es können sich nicht zwei der Zahlen $r$ um eine ganze Zahl oder Null von einander unterscheiden, weil sonst zwei der $\omega$ einander gleich wären. Folglich enthält jede der $n$ Reihen (8) andere Potenzen von $x$ als alle übrigen, woraus nach Satz 2 des Anhangs, Zu Kap. IV, die lineare Unabhängigkeit der Reihen folgt.

Ist nun $x = 0$ Stelle der Unbestimmtheit oder liegt auf der inneren Begrenzungsperipherie von $U$, bezw. innerhalb derselben, ohne mit $x = 0$ identisch zu sein, ein wirklich singulärer Punkt (s. Art. 34), so muss mindestens eine der Reihen (8) sich thatsächlich unbestimmt verhalten. Denn andernfalls hätten wir ja $n$ linear unabhängige, sich bestimmt verhaltende Integrale. $x = 0$ wäre also nach Kap. X Stelle der Bestimmtheit und, da die Reihen (8) dann ihrer analytischen Gestalt zufolge in dem ganzen Innern des äusseren Begrenzungskreises gültig wären[1]), müsste dieses ganze Kreisinnere — abgesehen höchstens von $x = 0$ selbst — von wirklich singulären Punkten frei sein.

Wir haben daher zunächst das Resultat:

*In einem Kreisring $U$ mit dem Mittelpunkt $x = 0$, dessen Fläche von singulären Punkten frei ist, existiert bei Verschiedenheit sämtlicher Wurzeln $\omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_n$ der zugehörigen Fundamentalgleichung ein Fundamentalsystem von Integralen*

$$\eta_1 = x^{r_1}\varphi_1(x), \ldots, \eta_n = x^{r_n}\varphi_n(x),$$

*wo*

$$r_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\log\omega_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

*und die $\varphi$ innerhalb $U$ eindeutig sind, aber sich im allgemeinen unbestimmt verhalten. — Ist insbesondere $x = 0$ Stelle der Unbestimmtheit (U also z. B. die Umgebung derselben) oder liegt auf der inneren Begrenzungsperipherie von $U$, bezw. innerhalb derselben ein von $x = 0$ verschiedener wirklich singulärer Punkt, so verhält sich sicher mindestens eine der Reihen* (8) *unbestimmt.*

1) Denn die Reihen (8) enthielten nach Abtrennung der Faktoren $x^r$ dann nur eine *endliche* Anzahl negativer Potenzen.

**82. Verfahren bei mehrfachen Wurzeln der Fundamentalgleichung.** Wir gehen jetzt zu dem allgemeineren Fall über, dass die Fundamentalgleichung auch mehrfache Wurzeln besitzt. $\omega = \omega_1$ sei eine $\lambda$-fache Wurzel derselben. Dann bekommen wir zunächst jedenfalls ein Integral von derselben Gestalt wie vorher, in welchem wir jetzt aber den eindeutigen Bestandteil mit $\varphi_{11}$ bezeichnen, also ein Integral

(10) $$\eta_1 = x^{r_1}\varphi_{11}(x),$$

wo $r_1 = \frac{1}{2\pi i}\log\omega_1$ und $\varphi_{11}$ innerhalb $U$ eindeutig ist und sich im allgemeinen unbestimmt verhält. Da es jedoch jetzt weniger als $n$ verschiedene Wurzeln $\omega_\alpha$ giebt, erhalten wir auf diese Art zunächst weniger als $n$ Integrale.

Um die Zahl der Integrale auch in diesem Fall zu $n$ zu ergänzen, wenden wir wieder die in Artikel 29, 30 entwickelte Fuchs'sche Methode an. Wir substituieren in (1)

(11) $$y = \eta_1 \int z\,dx,$$

woraus folgt

(11ª) $$z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\eta_1}\right),$$

und erhalten

(12) $$P\left(x, \eta_1 \int z\,dx\right) = P(x, \eta_1)\int z\,dx + Q(x, z),$$

wo

$$\begin{aligned} Q(x, z) = {} & z^{(n-1)}\eta_1 \\ & + z^{(n-2)}\left[\binom{n}{1}\eta_1' + p_1\eta_1\right] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + z\left[\binom{n}{1}\eta_1^{(n-1)} + \binom{n-1}{1}p_1\eta_1^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}\eta_1\right]. \end{aligned}$$

Damit (11) ein Integral von (1) ist, muss also $z$ ein Integral der Differentialgleichung

(13) $$Q(x, z) = 0$$

sein, und jedes solche liefert in (11) eingesetzt ein Integral von (1). Da nun alle Ableitungen von $\eta_1$, abgesehen von dem Faktor $x^{r_1}$, wieder innerhalb $U$ eindeutige Functionen von $x$ sind, so ist (13) nach Division durch $\eta_1$, wieder eine Differentialgleichung mit innerhalb $U$ eindeutigen Coefficienten.

Wir wollen jetzt die Beziehung aufsuchen, welche zwischen $A(\omega) = 0$ und der zu demselben Umlauf gehörigen Fundamental-

gleichung von (13) besteht. Zu dem Ende bilden wir die Fundamentalgleichung von (1) mittelst eines Fundamentalsystems, das aus $y_1\, y_2 \ldots y_n$ entsteht, wenn eines dieser Integrale durch $\eta_1$ ersetzt wird. Da nämlich in (4) nicht alle $c = 0$ sind, können wir annehmen, dass etwa $c_1 \neq 0$ sei. Dann bilden aber die Integrale

$$\eta_1\; y_2\; y_3 \ldots y_n \tag{14}$$

ein Fundamentalsystem, weil jedes Integral durch $y_1\, y_2 \ldots y_n$, $y_1$ aber wiederum durch $\eta_1\, y_2 \ldots y_n$ ausdrückbar ist. Benutzt man (14) zur Bildung der Fundamentalgleichung von (1), so lautet dieselbe, wenn dabei die Umlaufscoefficienten von $y_2 \ldots y_n$ mit $\beta_{ik}$ bezeichnet werden,

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, & \beta_{21}, & \ldots, & \beta_{n1} \\ 0, & \beta_{22} - \omega, & \ldots, & \beta_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & \beta_{2n}, & \ldots, & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

sodass

$$\Delta(\omega) = (\omega_1 - \omega) \begin{vmatrix} \beta_{22} - \omega, & \ldots, & \beta_{n2} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \beta_{2n}, & \ldots, & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Um nun die Fundamentalgleichung $\Delta_1(\omega) = 0$ der Gleichung (13) zu bilden, erinnern wir uns daran (s. Art. 29), dass die $n - 1$ Functionen

$$z_2 = \frac{d}{dx}\frac{y_2}{\eta_1}, \quad z_3 = \frac{d}{dx}\frac{y_3}{\eta_1}, \ldots, z_n = \frac{d}{dx}\frac{y_n}{\eta_1} \tag{17}$$

ein Fundamentalsystem von (13) bilden. Die Umlaufsrelationen derselben sind leicht zu ermitteln. Es ist ja (s. Gl. (15))

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\left(\dfrac{y_2}{\eta_1}\right)} = \dfrac{\beta_{21}}{\omega_1} + \dfrac{\beta_{22}}{\omega_1}\dfrac{y_2}{\eta_1} + \cdots + \dfrac{\beta_{2n}}{\omega_1}\dfrac{y_n}{\eta_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{\left(\dfrac{y_n}{\eta_1}\right)} = \dfrac{\beta_{n1}}{\omega_1} + \dfrac{\beta_{n2}}{\omega_1}\dfrac{y_2}{\eta_1} + \cdots + \dfrac{\beta_{nn}}{\omega_1}\dfrac{y_n}{\eta_1}. \end{array}\right. \tag{18}$$

Da nun

$$\bar{z}_i = \overline{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right)} = \frac{d}{dx}\overline{\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right)} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)\,[1],$$

so erhält man aus (18) durch Differentiation nach $x$

---

1) S. Anhang.

$$(19)\qquad \begin{cases} \bar{z}_2 = \dfrac{\beta_{22}}{\omega_1} z_2 + \cdots + \dfrac{\beta_{2n}}{\omega_1} z_n \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \\ \bar{z}_n = \dfrac{\beta_{n2}}{\omega_1} z_2 + \cdots + \dfrac{\beta_{nn}}{\omega_1} z_n \end{cases}$$

und folglich als Fundamentalgleichung von (13)

$$(20)\qquad A_1(\omega) = \begin{vmatrix} \dfrac{\beta_{22}}{\omega_1} - \omega, \ldots, & \dfrac{\beta_{n2}}{\omega_1} \\ \cdot \quad \cdots & \cdot \\ \dfrac{\beta_{2n}}{\omega_1}, \ldots, & \dfrac{\beta_{nn}}{\omega_1} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliciert man diese Gleichung mit $\omega_1^{n-1}$, indem man in der Determinante jedes Element mit $\omega_1$ multipliciert, so folgt aus der Vergleichung mit (16)

$$(21)\qquad \omega_1^{n-1} A_1(\omega) = \frac{A(\omega\,\omega_1)}{\omega_1 - \omega\,\omega_1}.$$

Sind also $\omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_n$, wo $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_\lambda$, die Wurzeln von $A(\omega) = 0$, so sind diejenigen von $A_1(\omega) = 0$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \ldots, \frac{\omega_\lambda}{\omega_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_1},$$

von denen die $\lambda - 1$ ersten den Wert 1 haben. Dieses Ergebnis, welches in bemerkenswerter Weise an ein für die determinierende Gleichung in Artikel 47 abgeleitetes erinnert, sprechen wir dahin aus:

*Der $\lambda$-fachen Wurzel $\omega_1$ der Fundamentalgleichung der vorgelegten Differentialgleichung* (1) *entspricht die $(\lambda - 1)$-fache Wurzel* 1 *der Fundamentalgleichung der Differentialgleichung* (13).

**83. Integralgruppen entsprechend den mehrfachen Linearteilern der Fundamentalgleichung.** Aus dem vorstehenden Resultat folgt nun, wie vorher, dass die Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $z$ (13) ein innerhalb $U$ *eindeutiges* Integral $\zeta_2$ besitzt, mithin die vorgelegte Differentialgleichung (1) nach (11) das Integral

$$\eta_2 = \eta_1 \int \zeta_2\, dx.$$

Mit der Differentialgleichung (13) wird alsdann geradeso verfahren, wie oben mit (1), sodass man ein Integral derselben

$$\zeta_2 \int \vartheta_3\, dx$$

findet, wo $\vartheta_3$ innerhalb $U$ eindeutig ist, also für (1) das Integral

$$\eta_3 = \eta_1 \int \zeta_2\, dx \int \vartheta_3\, dx$$

u. s. w. So fortfahrend gelangt man schliesslich zu einer Differentialgleichung $(n-\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Fundamentalgleichung 1 nur noch als einfache Wurzel besitzt, sodass sie die letzte ist, welche ein eindeutiges Integral in $U$

$$\chi_\lambda$$

liefert. Demgemäss erhalten wir entsprechend der $\lambda$-fachen Wurzel $\omega_1$ der Fundamentalgleichung (2) von (1) die Gruppe $\Gamma$ von $\lambda$ Integralen

$$(22)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \eta_1 \\ \eta_2 = \eta_1 \int \zeta_2\, dx \\ \eta_3 = \eta_1 \int \zeta_2\, dx \int \vartheta_3\, dx \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \eta_\lambda = \eta_1 \int \zeta_2\, dx \int \vartheta_3\, dx \int \ldots \int \chi_\lambda\, dx, \end{cases}$$

wo $\eta_1, \zeta_2, \vartheta_3, \ldots, \chi_\lambda$ sämtlich innerhalb $U$ gültig sind, sich im allgemeinen in Bezug auf $x=0$ unbestimmt verhalten, $\eta_1$ bis auf den Faktor $x^{r_1}$, die übrigen unmittelbar in $U$ eindeutig sind.

Die analytische Gestalt dieser Gruppenintegrale nach Ausführung der Integrationen ist leicht zu ermitteln. Da die zuerst zu integrierende Function eindeutig ist und dann immer wieder mit einer eindeutigen Function multipliciert wird, abgesehen von der letzten Multiplication mit $\eta_1$, worauf ja aber nicht mehr integriert wird, so greifen hier genau dieselben Überlegungen Platz wie in Artikel 48 und bei der näheren Ausführung des Verfahrens im Anhang, Zu Kap. VII, — natürlich nur insoweit, als sich dieselben nicht auf die Anfangspotenzen der in Frage kommenden Reihen beziehen. Die Gruppe (22) hat daher nach Ausführung der Integrationen die Gestalt

$$(22^{a})\qquad \begin{cases} \eta_1 = x^{r_1}\varphi_{11} \\ \eta_2 = x^{r_1}[\varphi_{21} + \varphi_{22}\log x] \\ \eta_3 = x^{r_1}[\varphi_{31} + \varphi_{32}\log x + \varphi_{33}\log^2 x] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \eta_\lambda = x^{r_1}[\varphi_{\lambda 1} + \varphi_{\lambda 2}\log x + \varphi_{\lambda 3}\log^2 x + \cdots + \varphi_{\lambda\lambda}\log^{\lambda-1} x], \end{cases}$$

wo die $\varphi$ sämtlich innerhalb $U$ eindeutig sind, aber sich im allgemeinen in Bezug auf $x=0$ unbestimmt verhalten. Die Functionen $\varphi_{\alpha\alpha}$ $(\alpha=1,2,\ldots,\lambda)$ sind bis auf einen constanten Faktor, der auch Null sein kann, mit $\varphi_{11}$ identisch. Lässt man die Integrationsconstanten willkürlich, so enthält jedes Integral die in der Gruppe vorangehenden in sich. Der Grad von $\log x$, bis zu welchem die Integrale thatsächlich aufsteigen, nimmt daher in der Folge von $\eta_1$ zu $\eta_\lambda$ nie ab. Die Umlaufsrelationen und die sich daraus ergebenden Beziehungen zwischen den Func-

tionen $\varphi_{\alpha\beta}$ (vergl. Art. 51. 52) können wir zwar nicht in derselben Weise wie in Art. 51, aber hier wie dort mittelst der soeben gemachten Bemerkung über die willkürlichen Integrationsconstanten in (22) (s. dort Art. 50) ableiten. Wir wollen indessen dies hier nicht näher ausführen, weil sich die gedachten Relationen bei der nachfolgenden Zerlegung der Gruppen in Untergruppen einfacher und vollständiger ergeben. Unmittelbar sieht man jedoch, dass nach dem Umlauf jedes Integral derselben Gruppe angehört wie vorher.

Verfährt man nun wie bei $\omega_1$ bei allen Wurzeln der Fundamentalgleichung, so erhält man im ganzen $n$ Integrale, da jeder mehrfachen Wurzel eine Integralgruppe von gleicher Gliederzahl zugeordnet ist. Der Nachweis, dass dieselben ein Fundamentalsystem bilden, erfolgt wieder in der gewohnten Weise. Die Integrale einer Gruppe sind linear unabhängig nach ihrer Erzeugungsart (s. Art. 30); zwischen den Integralen verschiedener Gruppen ist aber eine lineare Relation deshalb unmöglich, weil die in einer Gruppe auftretenden Reihen nur solche Potenzen von $x$ enthalten, die in keiner andern Gruppe vorkommen[1]), da die den verschiedenen Wurzeln $\omega_\alpha$ entsprechenden Zahlen $r_\alpha$ sich nicht um ganze Zahlen von einander unterscheiden.

Wir haben daher das Resultat:

*Besitzt die zu einem Umlauf innerhalb $U$ etwa auf einem zu den Begrenzungskreisen concentrischen Kreise gehörige Fundamentalgleichung mehrfache Wurzeln, so existiert ein innerhalb $U$ gültiges Fundamentalsystem von Integralen, welches entsprechend den Linearteilern der Fundamentalgleichung in Gruppen $\Gamma$ der Gestalt* (22) *bezw.* (22$^a$) *gesondert ist, sodass jedem $\lambda$-fachen Linearteiler eine aus $\lambda$ Integralen bestehende Gruppe zugeordnet ist. Die Integrale verhalten sich im allgemeinen unbestimmt in Bezug auf $x = 0$, mindestens eines von ihnen sicher, wenn die am Schluss des Satzes in Art.* 81 *angegebenen Bedingungen erfüllt sind.*

Aus dem letzteren Grunde ist also der Gültigkeitsbereich eines Fundamentalsystems bei einer Stelle der Unbestimmtheit stets nur ein *Kreisring*, nicht ein Kreis (s. Art. 75).

**84. Sämtliche Integrale erster Stufe in einer Gruppe**[2]). Wir haben bisher die Fundamentalgleichung in einer der Untersuchung des Kapitel VII bei Stellen der Bestimmtheit völlig parallel laufenden Weise verwandt. Sie ersetzt uns, was dort durch die determinierende Gleichung und die Recursionsformel geleistet wurde. Dieser Paralle-

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 6.

2) Vergl. zu diesem und den zwei folgenden Artikeln Hamburger, Crelles Journ. Bd. 76. (1873). S. 117 ff.

lismus geht aber noch weiter. Wie wir nämlich dort bei Stellen der Bestimmtheit mit jenen Hilfsmitteln (s. Kap. I, II, III und VIII) der Reihe nach die sämtlichen in eine Gruppe gehörigen Integrale der verschiedenen Stufen aufstellten, so können wir auch hier die Sonderung von $\lambda$ linear unabhängigen Integralen einer Gruppe $\Gamma$ in Integrale erster, zweiter, u. s. w. Stufe mit Hilfe der Fundamentalgleichung nachweisen, womit dann die Zerlegung der Gruppe in Untergruppen im engsten Zusammenhang steht. Wir müssen jedoch hier, obwohl das Resultat schliesslich auf das Gleiche herauskommen wird, das Problem etwas anders fassen als damals, indem wir zuerst nach allen Integralen von $\Gamma$ fragen, *die sich beim Umlauf am einfachsten verhalten*, dann nach allen, *welche sich nächst jenen am einfachsten verhalten*, u. s. w. Dies ist geboten durch unsern Ausgang von der Fundamentalgleichung.

Der Linearteiler $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ der Fundamentalgleichung (2) möge nun, in seine Elementarteiler zerspalten,

$$\begin{array}{llll} \mu_0\text{-mal den Elementarteiler} & (\omega_1 - \omega) \\ \mu_1\text{-} \quad ,, \qquad ,, \qquad\qquad ,, & (\omega_1 - \omega)^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\quad \cdot & \cdot \\ \mu_l\text{-} \quad ,, \qquad ,, \qquad\qquad ,, & (\omega_1 - \omega)^{l+1} \end{array}$$

liefern, wo $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_l$ positive ganze Zahlen oder Null sind und

$$\mu_0 + 2\mu_1 + 3\mu_2 + \cdots + (l+1)\mu_l \equiv \lambda$$

ist. Die Anzahl der Elementarteiler des Linearteilers $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ ist daher

$$\nu_0 \equiv \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_l .$$

Diese Zahl ist also nach Artikel 78 der Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems (3), d. h. wir können in

$$\eta \equiv c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

$\nu_0$ der $c$ willkürlich wählen, während sich die übrigen $n - \nu_0$ vermöge (3) linear und homogen durch diese ausdrücken. Bezeichnen wir die $\nu_0$ willkürlichen Constanten durch

$$C_{01}, \; C_{02}, \ldots, C_{0\nu_0}$$

und nehmen wir der Übersichtlichkeit wegen an, es seien dies etwa die $\nu_0$ ersten $c$, also

$$c_1 \equiv C_{01}, \quad c_2 \equiv C_{02}, \ldots, c_{\nu_0} \equiv C_{0\nu_0},$$

so mögen die andern durch diese vermöge der Gleichungen

$$(23) \qquad \begin{cases} c_{\nu_0+1} = a_{\nu_0+1,1} C_{01} + \cdots + a_{\nu_0+1,\nu_0} C_{0\nu_0} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_n \quad = \quad a_{n1} \;\; C_{01} + \cdots + \;\; a_{n\nu_0} \;\; C_{0\nu_0} \end{cases}$$

ausgedrückt sein. Substituiert man diese Werte in $\eta$, so nimmt $\eta$ die Gestalt an

(24) $$\eta \equiv C_{01} y_{01} + C_{02} y_{02} + \cdots + C_{0\nu_0} y_{0\nu_0},$$

wo

(25) $$\begin{cases} y_{01} \equiv y_1 + a_{\nu_0+1,1}\, y_{\nu_0+1} + \cdots + a_{n1}\, y_n \\ y_{02} \equiv y_2 + a_{\nu_0+1,2}\, y_{\nu_0+1} + \cdots + a_{n2}\, y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{0\nu_0} \equiv y_{\nu_0} + a_{\nu_0+1,\nu_0}\, y_{\nu_0+1} + \cdots + a_{n\nu_0}\, y_n\,. \end{cases}$$

Die Gleichung (24) stellt nun offenbar *das allgemeinste Integral, welches sich bei dem Umlauf nur mit $\omega_1$ multipliciert*, dar; denn wir haben zu seiner Bildung die Constanten $c_1 \ldots c_n$, wie es erforderlich ist, nach dem Gleichungssystem (3) bestimmt, aber alle willkürlichen Grössen dabei unbestimmt gelassen.

Geben wir diesen willkürlichen Constanten $C_{01} \ldots C_{0\nu_0}$ nun die $\nu_0$ Wertsysteme

$$\begin{matrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1, \end{matrix}$$

so erhalten wir die $\nu_0$ Integrale $y_{01}, y_{02}, \ldots y_{0\nu_0}$, aus denen man umgekehrt durch Composition mit $\nu_0$ willkürlichen Constanten sofort wieder das Integral (24) herstellen kann.

Dass die $\nu_0$ Integrale $y_{01} \ldots y_{0\nu_0}$ linear unabhängig sind, folgt unmittelbar aus (25). Eine lineare homogene Relation zwischen ihnen

(26) $$A_1 y_{01} + A_2 y_{02} + \cdots + A_{\nu_0} y_{0\nu_0} \equiv 0,$$

würde nämlich eine solche zwischen $y_1\, y_2 \ldots y_n$ zur Folge haben, wenn nicht die Coefficienten von $y_1\, y_2 \ldots y_n$ für sich den Wert Null hätten. Nach (25) ist aber $A_1$ der Coefficient von $y_1$, $A_2$ der von $y_2$, u. s. w. endlich $A_{\nu_0}$ der von $y_{\nu_0}$ in der aus (26) sich ergebenden Relation zwischen $y_1\, y_2 \ldots y_n$. Die sämtlichen $A$ müssen daher Null sein, d. h. eine Relation (26) ist ausgeschlossen.

Die analytische Gestalt des Integrals $\eta$, bezw. der Integrale $y_{0\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \nu_0)$ kennen wir aber bereits; es ist

$$y_{0\alpha} \equiv x^{r_1} \varphi_{0\alpha}(x),$$

wo $r_1 = \frac{1}{2\pi i} \log \omega_1$ und $\varphi_{0\alpha}(x)$ eine innerhalb $U$ eindeutige, sich im allgemeinen unbestimmt verhaltende Reihe ist. Es sind also logarithmenfreie oder Integrale erster Stufe derselben Gruppe $\Gamma$.

Wir haben daher zunächst das Resultat:

*Wenn $\nu_0 = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_l$ die Anzahl aller Elementarteiler*

*des Linearteilers $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ der Fundamentalgleichung ist, so existieren genau $\nu_0$ linear unabhängige Integrale erster Stufe der Gruppe $\Gamma$ innerhalb $U$*

$$y_{01} = x^{r_1}\varphi_{01}, \ldots, y_{0\nu_0} = x^{r_1}\varphi_{0\nu_0},$$

*oder $\nu_0$ Integrale, welche sich bei dem Umlauf am einfachsten verhalten, indem sie sich nur mit $\omega_1$ multiplicieren.*

**85. Sämtliche Integrale einer Gruppe nach ihrer Stufenzahl geordnet.** Wenn wir nunmehr nach den Integralen der Gruppe $\Gamma$ fragen, welche sich nächst denen von der ersten Stufe am einfachsten bei dem Umlauf verhalten, so setzen wir dabei voraus, dass $\lambda > \nu_0$, da wir sonst ja schon $\lambda$ linear unabhängige Integrale der Gruppe $\Gamma$ hätten, die sämtlich erster Stufe wären. Der Fall $\lambda = \nu_0$ erfordert aber, dass $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_l = 0$, d. h. $\lambda = \mu_0$, oder dass $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ in $\lambda$ *einfache* Elementarteiler zerfällt.

Wir gehen nun von dem Fundamentalsystem

$$y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0\nu_0}, y_{\nu_0+1}, \ldots, y_n \tag{27}$$

aus, bei dem die $\nu_0$ soeben ermittelten Integrale erster Stufe an Stelle von $y_1\, y_2 \ldots y_{\nu_0}$ getreten sind. Dass die $n$ Integrale (27) wirklich ein Fundamentalsystem bilden, sieht man aus (25): man kann ja die Integrale $y_1\, y_2 \ldots y_{\nu_0}$ durch die Integrale (27) ausdrücken, folglich jedes beliebige Integral ebenso. Behalten wir für die Umlaufscoefficienten der $n - \nu_0$ letzten Integrale in (27) die alten Zeichen $(\alpha_{ik})$ bei, so lauten die Umlaufsrelationen des Fundamentalsystems (27)

$$\tag{28} \begin{cases} \overline{y_{01}} = \omega_1 y_{01} \\ \overline{y_{02}} = \omega_1 y_{02} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{y_{0\nu_0}} = \omega_1 y_{0\nu_0} \\ \overline{y_{\nu_0+1}} = \alpha_{\nu_0+1,1}\, y_{01} + \cdots + \alpha_{\nu_0+1,\nu_0}\, y_{0\nu_0} + \alpha_{\nu_0+1,\nu_0+1}\, y_{\nu_0+1} + \cdots + \alpha_{\nu_0+1,n}\, y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \overline{y_n} = \alpha_{n1}\, y_{01} + \cdots + \alpha_{n\nu_0}\, y_{0\nu_0} + \alpha_{n,\nu_0+1}\, y_{\nu_0+1} + \cdots + \alpha_{nn}\, y_n. \end{cases}$$

Hiernach nimmt die Fundamentalgleichung, mittelst (27) gebildet, die Gestalt an

$$\tag{2^a} A(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, & \ldots, & 0, & \alpha_{\nu_0+1,1}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & \ldots, & \omega_1 - \omega, & \alpha_{\nu_0+1,\nu_0}, & \ldots, & \alpha_{n\nu_0} \\ 0, & \ldots, & 0, & \alpha_{\nu_0+1,\nu_0+1} - \omega, & \ldots, & \alpha_{n,\nu_0+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & & 0 & \alpha & & \alpha \quad \omega \end{vmatrix} = 0,$$

sodass

(29) $$A(\omega) = (\omega_1 - \omega)^{\nu_0} A'(\omega),$$

wo

(30) $$A'(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{\nu_0+1,\,\nu_0+1} - \omega, & \ldots, & \alpha_{n,\,\nu_0+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{\nu_0+1,\,n} & \ldots, & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Da $\lambda > \nu_0$ sein sollte, enthält $A'(\omega)$ den Linearteiler $\omega_1 - \omega$ noch in der Potenz $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \nu_0}$. Wir können aber nach einem von Casorati herrührenden Satz[1]) sogar aussagen:

*Die Determinante $A'(\omega)$ enthält jeden zu $\omega_1 - \omega$ gehörigen Elementarteiler in einem um Eins niedrigeren Grad als $A(\omega)$.*

$A'(\omega)$ hat demnach (s. Art. 84)

$$\begin{array}{llll} \mu_1\text{-mal} & \text{den} & \text{Elementarteiler} & (\omega_1 - \omega) \\ \mu_2\text{-} & ,, & ,, & (\omega_1 - \omega)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_l\text{-} & ,, & ,, & (\omega_1 - \omega)^l, \end{array}$$

und die Anzahl der Elementarteiler von $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \nu_0}$ in $A'(\omega)$ ist

$$\nu_1 = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_l = \nu_0 - \mu_0.$$

Um nun Integrale zu suchen, die sich nächst denen der ersten Stufe am einfachsten beim Umlauf ändern, setzen wir

(31) $$\eta' = c'_{\nu_0+1} y_{\nu_0+1} + \cdots + c'_n y_n,$$

wo die $c'$ noch unbestimmt sind, sodass nach (28) die Umlaufsrelation dieses Integrals lautet:

(32) $$\overline{\eta'} =$$
$$(c'_{\nu_0+1}\alpha_{\nu_0+1,1} + \cdots + c'_n \alpha_{n1}) y_{01} + \cdots + (c'_{\nu_0+1}\alpha_{\nu_0+1,\nu_0} + \cdots + c'_n \alpha_{n\nu_0}) y_{0\nu_0}$$
$$+ (c'_{\nu_0+1}\alpha_{\nu_0+1,\nu_0+1} + \cdots + c'_n \alpha_{n,\nu_0+1}) y_{\nu_0+1} + \cdots + (c'_{\nu_0+1}\alpha_{\nu_0+1,n} + \cdots + c'_n \alpha_{nn}) y_n.$$

$\eta'$ geht also bei dem Umlauf in eine lineare homogene Function der Integrale erster Stufe $y_{01} \ldots y_{0\nu_0}$ und in eine ebensolche der Integrale $y_{\nu_0+1}, \ldots, y_n$ über. Da wir bereits alle Integrale erster Stufe von $\Gamma$ besitzen, würden wir zu einem neuen Resultat nicht kommen, wenn wir jetzt verlangten, es sollte $\overline{\eta'} = \omega_1 \eta'$ sein, was das identische Verschwinden der ersten Zeile von (32) rechts erfordern würde. Die

1) Beweis im Anhang. — Von Casorati rührt auch die auf diesem Satz beruhende Vervollständigung des Hamburger'schen Verfahrens her. Vergl. Comptes rendus hebdom. de l'académie des sciences de Paris, t. 92. (1881). S. 175—178 u. S. 238—241.

einfachste neue Forderung, die wir stellen können, ist darum die, es soll $\overline{\eta}'$ *abgesehen von einer hinzutretenden linearen homogenen Function von* $y_{01} \ldots y_{0r_0}$ den Wert $\omega_1 \eta'$ erhalten, d. h. es sollen die $c'$ so bestimmt werden, dass die Gleichungen

$$(33)\qquad \begin{cases} c'_{r_0+1}\alpha_{r_0+1,\,r_0+1} + \cdots + c'_n\alpha_{n,\,r_0+1} = \omega_1 c'_{r_0+1} \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ c'_{r_0+1}\alpha_{r_0+1,\,n} \quad + \cdots + \quad c'_n\alpha_{nn} \quad = \quad \omega_1 c'_n \end{cases}$$

erfüllt werden. Dies ist aber möglich, weil die Determinante dieses Systems linearer homogener Gleichungen die verschwindende Determinante $\varDelta'(\omega_1)$ ist. Und da $r_1$ die Zahl der Elementarteiler des Linearteilers $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - r_0}$ von $\varDelta'(\omega)$ ist, so ist das System (33) $r_1$-fach unbestimmt. Bezeichnen wir die $r_1$ willkürlich bleibenden der Coefficienten $c'_{r_0+1}, \ldots, c'_n$, durch welche sich alle übrigen linear und homogen ausdrücken, mit

$$C_{11},\ C_{12}, \ldots, C_{1r_1},$$

so wird

$$(34)\qquad \eta' = C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \cdots + C_{1r_1}y_{1r_1},$$

wo $y_{11}\, y_{12} \ldots y_{1r_1}$ $r_1$ linear unabhängige Integrale sind. Das Letztere ergiebt sich ebenso wie bei $y_{01} \ldots y_{0r_0}$ im vorigen Artikel. (34) stellt daher, wenn noch das allgemeinste Integral erster Stufe von $\Gamma$ addiert wird, *das allgemeinste Integral dar, welches sich beim Umlauf mit* $\omega_1$ *multipliciert und um eine lineare homogene Verbindung der Integrale erster Stufe der Gruppe* $\Gamma$ *vermehrt;* $y_{11}\, y_{12} \ldots y_{1r_1}$ aber sind $r_1$ linear unabhängige Integrale derselben Art, aus denen man umgekehrt durch Composition mit $r_1$ willkürlichen Constanten und durch Hinzufügung des allgemeinsten Integrals erster Stufe von $\Gamma$ wieder das allgemeinste Integral der betrachteten Art bilden kann.

Die $r_1$ Integrale $y_{11} \ldots y_{1r_1}$ sind aber nicht nur unter einander, sondern auch von den $y_{01} \ldots y_{0r_0}$ linear unabhängig, weil eine Relation zwischen $y_{01} \ldots y_{0r_0}$, $y_{11} \ldots y_{1r_1}$ eine solche zwischen den Elementen des Fundamentalsystems (27) bedeuten würde. Bezeichnet man ferner die linearen homogenen Functionen von $y_{01} \ldots y_{0r_0}$, um die sich $y_{11} \ldots y_{1r_1}$ beim Umlauf vermehren, und die sich aus (32) ergeben, bezw. mit

$$L_{11}(y_{01} \ldots y_{0r_0}), \ldots, L_{1r_1}(y_{01} \ldots y_{0r_0}),$$

sodass

$$(35)\qquad \overline{y}_{1\alpha} = \omega_1 y_{1\alpha} + L_{1\alpha}(y_{01}, \ldots, y_{0r_0}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r_1),$$

so sind auch $L_{11}, \ldots, L_{1r_1}$ linear unabhängig. Bestände nämlich eine Relation

$$l_1 L_{11} + l_2 L_{12} + \cdots + l_{\nu_1} L_{1\nu_1} \equiv 0,$$

so wäre nach (35)

$$\overline{l_1 y_{11} + \cdots + l_{\nu_1} y_{1\nu_1}} \equiv \omega_1 (l_1 y_{11} + \cdots + l_{\nu_1} y_{1\nu_1}).$$

Demnach müsste $l_1 y_{11} + \cdots + l_{\nu_1} y_{1\nu_1}$ ein Integral erster Stufe von $\Gamma$ und daher durch die $y_{01} \ldots y_{0\nu_0}$ ausdrückbar sein, während doch die $y_{11} \ldots y_{1\nu_1}$ und $y_{01} \ldots y_{0\nu_0}$, wie wir soeben sahen, linear unabhängig sind.

Wir können daher die $\nu_1$ Integrale $L_{11} \ldots L_{1\nu_1}$ geradezu an Stelle von $\nu_1$ der $y_{01} \ldots y_{0\nu_0}$ setzen, sodass von diesen dann noch $\nu_0 - \nu_1$ übrig bleiben, die untereinander und von den $L$ unabhängig sind. Behalten wir dann aber statt der $L$ die alten Zeichen bei und nehmen an, dass etwa gerade die $\nu_1$ ersten der $y_0$ durch die $L$ ersetzt wurden, so besitzen wir jetzt ausser den $\nu_0$ Integralen $y_{01} \ldots y_{0\nu_0}$ die $\nu_1$ Integrale $y_{11} \ldots y_{1\nu_1}$, deren Umlaufsrelationen lauten

(35ª) $$\overline{y_{1\alpha}} \equiv \omega_1 y_{1\alpha} + y_{0\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu_1).$$

Hieraus folgert man aber leicht, dass $y_{1\alpha}$ derselben Gruppe $\Gamma$ angehört wie $y_{0\alpha}$, da andernfalls (35ª) eine lineare homogene Relation zwischen Integralen verschiedener Gruppen wäre, die nach Satz 6 des Anhangs, Zu Kap. IV, ausgeschlossen ist.

Ist nun $\nu_0 + \nu_1 = \lambda$, so besitzen wir bereits $\lambda$ linear unabhängige Integrale der Gruppe $\Gamma$. Andernfalls operieren wir mit dem Fundamentalsystem

$$y_{01} \ldots y_{0\nu_0}, \quad y_{11} \ldots y_{1\nu_1}, \quad y_{\nu_0+\nu_1+1} \ldots y_n$$

weiter, wobei

$$\Delta(\omega) = (\omega_1 - \omega)^{\nu_0+\nu_1} \Delta''(\omega)$$

wird und $\Delta''(\omega)$ nach dem Casorati'schen Satz nur noch

$$\nu_2 = \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_l$$

Elementarteiler entsprechend dem Linearteiler $(\omega_1 - \omega)^{\lambda-\nu_0-\nu_1}$ hat. Daher erhält man jetzt $\nu_2$ linear unabhängige Integrale

$$y_{21} \; y_{22} \ldots y_{2\nu_2}$$

mit den Umlaufsrelationen

(36) $$\overline{y_{2\alpha}} \equiv \omega_1 y_{2\alpha} + L_{2\alpha}(y_{01} \ldots y_{0\nu_0}, \; y_{11} \ldots y_{1\nu_1}) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu_2).$$

Diese $L_{2\alpha}$ sind wieder linear unabhängig und können an Stelle von $\nu_2$ der $y_{11} \ldots y_{1\nu_1}$ gesetzt werden, (wobei gleichzeitig $\nu_2$ der $y_{01} \ldots y_{0\nu_0}$ durch $\nu_2$ linear unabhängige Verbindungen derselben ersetzt werden) sodass die Umlaufsrelationen (36) die Gestalt annehmen

(36ª) $$\overline{y_{2\alpha}} \equiv \omega_1 y_{2\alpha} + y_{1\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu_2).$$

So fortfahrend gelangt man spätestens nach $l$ Schritten zu einer Determinante $A^{(l)}(\omega)$, welche nur noch den in $\nu_l = \mu_l$ Elementarteiler ersten Grades zerfallenden Linearteiler $(\omega_1 - \omega)^{\mu_l}$ besitzt und demgemäss $\nu_l$ Integrale

$$y_{l1}\ y_{l2} \cdots y_{l\nu_l}$$

mit den Umlaufsrelationen

$$\overline{y_{l\alpha}} = \omega_1 y_{l\alpha} + y_{l-1,\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu_l)$$

liefert. Schrittweise ergiebt sich die lineare Unabhängigkeit und die Zugehörigkeit zu $\Gamma$ aller bis dahin gewonnenen Integrale, und, da

$$\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_l = \mu_0 + 2\mu_1 + \cdots + (l+1)\mu_l = \lambda$$

ist, besitzt man dann $\lambda$ linear unabhängige Integrale der Gruppe $\Gamma$.

Wir haben daher das Resultat:

*Ist bezw. $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_l$ die Anzahl der Elementarteiler bezw. ersten, zweiten, . . ., $(l+1)^{ten}$ Grades des Linearteilers $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ der Fundamentalgleichung und ist*

$$\nu_\alpha = \mu_\alpha + \mu_{\alpha+1} + \cdots + \mu_l \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, l),$$

*so existieren $\lambda$ linear unabhängige Integrale der Gruppe $\Gamma$*

$$(37)\qquad \begin{cases} y_{01} \cdots y_{0\nu_l} \cdots \cdots y_{0\nu_2} \cdots y_{0\nu_1}\ \ y_{0,\nu_1+1} \cdots y_{0\nu_0} \\ y_{11} \cdots y_{1\nu_l} \cdots \cdots y_{1\nu_2} \cdots y_{1\nu_1} \\ y_{21} \cdots y_{2\nu_l} \cdots \cdots y_{2\nu_2} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ y_{l1} \cdots y_{l\nu_l}, \end{cases}$$

*deren Umlaufsrelationen lauten*

$$(38)\qquad \begin{cases} \overline{y_{0\alpha}} = \omega_1 y_{0\alpha} & (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu_0) \\ \overline{y_{\beta\alpha}} = \omega_1 y_{\beta\alpha} + y_{\beta-1,\alpha} & (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu_\beta). \\ (\beta = 1, 2, \ldots, l) \end{cases}$$

**86. Integraluntergruppen entsprechend den Elementarteilern der Fundamentalgleichung.** Wir können nunmehr zunächst leicht die *analytische Gestalt* der im vorigen Artikel successive bestimmten Integrale der Gruppe $\Gamma$ genau feststellen.

Im Artikel 84 sahen wir schon, dass die Integrale

$$y_{01} \cdots y_{0\nu_0}$$

logarithmenfreie oder Integrale erster Stufe sind. Nach Artikel 83 hat aber jedes Integral der Gruppe $\Gamma$ die Gestalt einer ganzen Function von $\log x$, deren Coefficienten abgesehen von dem Faktor $x^{r_1}$

innerhalb $U$ eindeutige, sich im allgemeinen unbestimmt verhaltende Reihen sind. Es kommt also nur noch darauf an, die Stufenzahl der einzelnen Integrale zu bestimmen. Nach der allgemeinen Umlaufsformel eines logarithmenbehafteten Integrals $y$, das einer der Zahl $\omega_1$ zugeordneten Gruppe angehört, (s. Art. 56 (6)) ist nun

$$\bar{y} - \omega_1 y$$

ein Integral von einer um Eins niedrigeren Stufe als $y$. Hieraus folgt nach (38), da die Integrale $y_{0\alpha}$ erster Stufe sind, dass alle Integrale $y_{11} \dots y_{1\nu_1}$ zweiter Stufe sind; hieraus wieder vermöge (38), dass alle Integrale $y_{21} \dots y_{2\nu_2}$ von der dritten Stufe u. s. f., endlich, dass die Integrale $y_{l1} \dots y_{l\nu_l}$ von der $(l+1)^{\text{ten}}$ Stufe sind. Also:

*Die Integrale*

$$y_{\alpha 1}\, y_{\alpha 2} \dots y_{\alpha \nu_\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, l)$$

*sind Integrale* $(\alpha + 1)^{\text{ter}}$ *Stufe, d. h. sie haben die Form*

$$y_{\alpha\beta} = x^{r_1}\left[\varphi_{\alpha\alpha}^{(\beta)} + \varphi_{\alpha\,\alpha-1}^{(\beta)} \log x + \cdots + \varphi_{\alpha 0}^{(\beta)} \log^\alpha x\right],$$

*wo die* $\varphi$ *innerhalb* $U$ *eindeutige Reihen sind.*

Weiter sind aber die Integrale (37) auch bereits in *Untergruppen* gesondert. Betrachtet man nämlich alle Integrale, die in (37) in derselben Colonne stehen, welche also gleichen zweiten Index haben, so sind dieselben bezw. $1^{\text{ter}}$, $2^{\text{ter}}$, $3^{\text{ter}}$ u. s. w. Stufe. Nach (38) multipliciert sich das erste Integral dieser Colonne beim Umlauf mit $\omega_1$, während jedes andere sich mit $\omega_1$ multipliciert und um das vorhergehende vermehrt. Die Integrale einer jeden Colonne von (37) bilden daher Untergruppen und zwar von der in Artikel 68 behandelten Art.

Die Anzahl der Untergruppen erster Stufe ist daher (s. Tabelle (37)) $\nu_0 - \nu_1 = \mu_0$, die der Untergruppen zweiter Stufe $\nu_1 - \nu_2 = \mu_1$, u. s. w., endlich die Anzahl der Untergruppen $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe $\nu_l = \mu_l$. Die Zahlen $\mu_0\, \mu_1 \dots \mu_l$ waren aber die Zahlen der Elementarteiler bezw. ersten, zweiten u. s. w., $(l+1)^{\text{ten}}$ Grades. Wir können somit das Ergebnis der letzten Untersuchungen in dem höchst eleganten Satz [1]) zusammenfassen, den wir für Stellen der Bestimmtheit schon im Artikel 80 gefunden hatten:

1) Vergl. dazu ausser den schon genannten Arbeiten von Hamburger und Casorati noch

Stickelberger, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Akad. Antrittsschrift, Leipzig, 1881.

Sauvage, Annales de l'école normale, 3me série, t. 8. (1891). S. 323 ff.

von Koch, Acta Math. Bd. 16. (1893) S. 282.

*Die dem $\lambda$-fachen Linearteiler $\omega_1 - \omega$ der Fundamentalgleichung zugeordnete Integralgruppe lässt sich derart in Untergruppen zerlegen, dass jedem Elementarteiler von $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ bestimmten Grades eine Untergruppe derselben Stufenzahl entspricht.*

Hiermit beschliessen wir die allgemeine Untersuchung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit oder allgemeiner in einem Kreisring.

# Kapitel XIII.

## Stellen der Unbestimmtheit, bei denen sich ein Teil der Integrale bestimmt verhält. Reduktibilität.

87. **Aufstellung der zu behandelnden Aufgaben.** Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, dass in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit und in einem kreisringförmigen Gebiet die Integrale sich *im allgemeinen unbestimmt* verhalten, und wir schlossen aus Kap. X, dass jedenfalls nicht alle Integrale sich in einem solchen Kreisring, der nicht durch eine Kreisfläche zu ersetzen ist, bestimmt verhalten können. Dagegen ist keineswegs ausgeschlossen, dass ein Teil der Elemente eines in dem Kreisringe $U$ mit dem Mittelpunkt $x=0$ gültigen Fundamentalsystems sich in Bezug auf $x=0$ bestimmt verhält.

Dass dies in der That möglich ist, wenn die Unbestimmtheitsstelle $x=0$ ausserwesentlich singulär ist, lehrte schon das 2. Beispiel in Artikel 23, wo wir das eine sich bestimmt verhaltende Integral $e^x$ fanden. Dass aber auch bei einer wesentlich singulären Stelle oder überhaupt in einem Kreisring, in welchem sich sogar die Coefficienten der Differentialgleichung unbestimmt verhalten, einzelne sich bestimmt verhaltende Integrale existieren können, zeige das einfache Beispiel

$$y'' - e^{\frac{1}{x}} y' = 0. \tag{1}$$

$x=0$ ist wesentlich singuläre Stelle, da $e^{\frac{1}{x}}$ unendlich viele negative Potenzen enthält. $U$ ist daher hier ein Kreisring um $x=0$, dessen innerer Kreis einen beliebig kleinen, dessen äusserer Kreis aber einen beliebig grossen Radius hat. Da der Coefficient von $y$ in (1) Null ist, wird die Differentialgleichung durch eine Constante befriedigt, d. h. durch ein in Bezug auf $x$ sich bestimmt verhaltendes Integral. Das zweite Integral muss sich daher unbestimmt verhalten. In der That folgt ja aus (1)

$$\frac{y''}{y'} = \frac{d \log y'}{dx} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$y' = e^{\int e^{\frac{1}{x}} dx}$$

$$y = \int e^{\int e^{\frac{1}{x}} dx} dx.$$

Wir fragen daher: *Unter welchen Umständen existieren auch in einem Kreisring U, der nicht durch einen Kreis zu ersetzen ist, sich bestimmt verhaltende Integrale?* — Wenn überhaupt solche Integrale existieren, so giebt es nach Art. 56 auch Integrale erster Stufe mit dieser Eigenschaft. Wir erhalten also durch Beantwortung der obigen Frage zugleich Aufklärung über das in Artikel 19 aufgetretene Problem, *unter welchen Umständen die bei einer ausserwesentlich singulären Stelle der Unbestimmtheit eventuell zu bildenden, sich bestimmt verhaltenden Reihen convergieren.*

Die Untersuchung der aufgeworfenen Frage wird uns auf den Begriff der *Reduktibilität linearer Differentialgleichungen* führen, der wiederum interessante Analogieen, aber auch Abweichungen im Vergleich mit der Theorie der algebraischen Gleichungen zeigt.

88. **Differentialgleichung niedrigerer Ordnung für die sich bestimmt verhaltenden Integrale.** Die Differentialgleichung

$$(2) \qquad P(x, y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

habe in $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit, die ausserwesentlich oder wesentlich singulär sein kann; die Umgebung derselben werde wieder mit $U$ bezeichnet. Alles Folgende gilt auch dann, wenn $U$ nur irgend einen Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$ bezeichnet, dessen Fläche keine singulären Punkte enthält und dessen innerer Begrenzungskreis nicht ganz weggelassen werden kann. Nur der kürzeren Ausdrucksweise wegen wollen wir fortan immer von dem zuerst genannten Fall sprechen.

Innerhalb $U$ gelte nun das Fundamentalsystem von (2)

$$(3) \qquad y_1 y_2 \ldots y_\nu, \; y_{\nu+1} \ldots y_n,$$

von dem die Integrale $y_1 \ldots y_\nu$ sich bei $x = 0$ bestimmt verhalten, während alle von diesen linear unabhängigen Integrale, insbesondere also $y_{\nu+1}, \ldots, y_n$, sich bei $x = 0$ unbestimmt verhalten. Bei einem Umlauf um $x = 0$ innerhalb $U$ geht jedes der Integrale $y_1\, y_2 \ldots y_\nu$ nur in eine lineare homogene Function von diesen selbst über; denn nach der allgemeinen Umlaufsformel (Artikel 56, Formel $(6_1)$) eines logarithmenbehafteten Integrals, in dessen Reihen sämtliche Exponen-

ten der Potenzen von $x$ sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, ist

$$\overline{y_\alpha} \equiv \omega_\alpha \left[ y_\alpha + (2\pi i) \frac{\partial y_\alpha}{\partial \log x} + \cdots \right] \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots \nu)$$

wieder ein sich bestimmt verhaltendes Integral und daher nach der Definition des Fundamentalsystems (3) durch $y_1 \ldots y_\nu$ allein ausdrückbar. Bei der Einteilung des Fundamentalsystems (3) in Gruppen oder Untergruppen (s. Kap. XII) müssen deshalb $y_1 \ldots y_\nu$ für sich in solche einzuteilen sein. Wir können daher voraussetzen, dass dies schon der Fall und dass bei dem Umlauf jedes der Integrale $y_1\, y_2 \ldots y_\nu$ sich nur mit einer von Null verschiedenen Constanten multipliciert und um eine lineare homogene Function der ihm vorangehenden dieser Integrale vermehrt. Bildet man dann die Differentialgleichung

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(\nu)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \ldots & y_1^{(\nu)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \ldots & y_2^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_\nu & y_\nu' & y_\nu'' & \ldots & y_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0,$$

so folgt nach Kap. X, dass diese bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit besitzt; d. h.

*Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung bei einer Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ $\nu$ linear unabhängige, sich bestimmt verhaltende Integrale besitzt, so wird sie durch sämtliche Integrale einer Differentialgleichung $\nu^{ter}$ Ordnung befriedigt, die bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat*[1]).

89. **Zerlegung eines Differentialausdrucks.** Aus vorstehendem Satz können wir nun eine interessante Folgerung in Bezug auf den vorgelegten Differentialausdruck $P(x, y)$ in (2) selbst ziehen, die überhaupt immer dann Platz greift, wenn eine Differentialgleichung

$$P(x, y) \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

mit bei $x = 0$ eindeutigen Coefficienten durch sämtliche Integrale einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung

$$Q(x, y) \equiv q_0 y^{(\nu)} + q_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + q_\nu y = 0$$

mit ebenfalls bei $x = 0$ eindeutigen Coefficienten erfüllt wird.

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. (1875). S. 326. 7, wo dieser Satz für Differentialgleichungen, die in $x = 0$ eine ausserwesentlich singuläre Stelle haben, ausgesprochen ist.

Differenziert man nämlich $Q$ $(n-\nu)$-mal nach $x$ und setz

$$\frac{p_0}{q_0} = r_0(x),$$

so ist der Differentialausdruck

$$P - r_0\, Q^{(n-\nu)}$$

nur noch von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und seine Coefficienten sind $r_0(x)$ bei $x=0$ eindeutig. Sie haben auch wie $r_0(x)$ in $x=0$ dann eine wesentlich singuläre Stelle, wenn $P$ oder $Q$ in $x=0$ solche besitzen. In gleicher Weise entfernt man aus diesem Diff tialausdruck auch die $(n-1)^{\text{te}}$ Ableitung von $y$ durch Subtra der mit einer leicht zu bestimmenden, bei $x=0$ eindeutigen Fun $r_1(x)$ multiplicierten $(n-\nu-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von $Q$, sodass der rentialausdruck

$$P - r_0\, Q^{(n-\nu)} - r_1\, Q^{(n-\nu-1)}$$

nur noch $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, bei $x=0$ eindeutige Coeffici und in $x=0$ wie $r_1(x)$ nur dann eine wesentlich singuläre Stell wenn $P$ oder $Q$ daselbst eine solche haben. So fortfahrend ge man zu der Identität

(5) $\quad P(x,y) - r_0\, Q^{(n-\nu)} - r_1\, Q^{(n-\nu-1)} - \cdots - r_{n-\nu} Q = S(x,y)$

wo $S(x,y)$ ein Differentialausdruck höchstens $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bei $x=0$ eindeutigen Coefficienten ist, die ebenso wie die bei eindeutigen Functionen $r_0\ r_1 \ldots r_{n-\nu}$ in $x=0$ eine wesentlich s läre Stelle nur dann haben, wenn dies von $P$ oder $Q$ gilt. man noch die Bezeichnung

$$r_0 y^{(n-\nu)} + r_1 y^{(n-\nu-1)} + \cdots + r_{n-\nu} y = R(x,y)$$

ein, so ist also nach (5)

(6) $$P(x,y) = R(x,Q) + S(x,y).$$

Setzt man nun in (6) für $y$ der Reihe nach $\nu$ linear unabhä Integrale von $Q=0$ ein, so verschwindet jedesmal $R$ und nach aussetzung auch $P$. Folglich muss auch der Differentialaus $S(x,y)$, dessen Ordnung $< \nu - 1$, für $\nu$ linear unabhängige Funct verschwinden; dies erfordert aber nach einem Satz des Artik dass die Coefficienten von $S(x,y)$ sämtlich Null sind. Den ergiebt (6)

$$P(x,y) = R(x,\ Q(x,y))$$

oder kurz geschrieben

(7) $$P = R(Q).$$

Wir wollen sagen: *der Differentialausdruck $P$ ist bei $x=0$ au Differentialausdrücken $Q$ und $R$ zusammengesetzt oder in diese zer*

Die Reihenfolge der letzteren ist natürlich wesentlich; wir wollen, wie hier, immer den „inneren“ ($Q$) zuerst nennen.

Die Herleitung von (7) zeigt noch, dass, wenn $P$ und $Q$ in $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle haben, das Gleiche auch von $R$ gilt. Somit haben wir den Satz [1]):

*Wenn eine Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung $P = 0$ durch alle Integrale einer Differentialgleichung $\nu^{ter}$ Ordnung $(\nu < n)$ $Q = 0$ erfüllt wird und die Coefficienten von $P$ und $Q$ bei $x = 0$ eindeutig sind, so ist $P$ bei $x = 0$ in $Q$ und einen Differentialausdruck $(n-\nu)^{ter}$ Ordnung $R$ mit ebenfalls bei $x = 0$ eindeutigen Coefficienten zerlegbar. Ist $x = 0$ für $P$ und $Q$ ausserwesentlich singuläre Stelle, so auch für $R$.*

Umgekehrt ist es evident, dass, wenn der Differentialausdruck $P(x, y)$ wie in (7) zerlegt werden kann, alle Integrale von $Q = 0$ der Gleichung $P = 0$ genügen, weil $R(x, y) = 0$ als homogene lineare Differentialgleichung das Integral Null besitzt. Die Integrale $y_1\, y_2 \ldots y_\nu$ von $Q = 0$ sind aber erst $\nu$ linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung $P = 0$, und wir gelangen folgendermassen zu $n - \nu$ weiteren. Es sei

$$\eta_{\nu+1}\;\eta_{\nu+2}\;\ldots\;\eta_n$$

ein Fundamentalsystem von $R(x, y) = 0$. Dann sind die Integrale der nicht homogenen Gleichungen

$$Q(x, y) = \eta_{\nu+\alpha} \quad {\scriptstyle(\alpha=1,2,\ldots,n-\nu)}, \tag{8}$$

je eines von jeder, die wir mit $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \ldots, y_n$ bezeichnen wollen, $n - \nu$ Integrale von $P = 0$. Die Integrale

$$y_1\; y_2\; \ldots\; y_\nu\; y_{\nu+1}\; \ldots\; y_n$$

sind aber linear unabhängig. Bestände nämlich eine Relation

$$C_1 y_1 + \cdots + C_\nu y_\nu + C_{\nu+1} y_{\nu+1} + \cdots + C_n y_n \equiv 0, \tag{9}$$

so dürften in dieser nicht alle $C_{\nu+1} \ldots C_n$ Null sein, weil die $y_1 \ldots y_\nu$ unter sich linear unabhängig sind, und es dürften nicht alle $C_1 \ldots C_\nu$ Null sein, weil aus einer linearen Abhängigkeit der $y_{\nu+1} \ldots y_n$ unter sich eine solche der $\eta$ nach (8) folgen würde. Es müsste also in (9) mindestens eines der $C_1 \ldots C_\nu$ und eines der $C_{\nu+1} \ldots C_n \neq 0$ sein. Wäre also etwa $C_1 \neq 0$, so wäre nach (8) und (9)

$$y_1 = -\frac{1}{C_1}(C_2 y_2 + \cdots + C_\nu y_\nu) - \frac{1}{C_1}(C_{\nu+1} y_{\nu+1} + \cdots + C_n y_n),$$

worin die zweite Klammer nicht identisch Null, ein Integral der nicht homogenen Gleichung

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 76. (1873). S. 257.

$$Q(x, y) = -\frac{C_{\nu+1}}{C_1}\eta_{\nu+1} - \cdots - \frac{C_n}{C_1}\eta_n,$$

während doch $y_1$ ein Integral der reducierten Gleichung $Q = 0$ ist. Eine Relation (9) ist daher ausgeschlossen, und wir haben das Ergebnis[1]):

*Wenn ein Differentialausdruck $n^{ter}$ Ordnung $P$ sich in zwei andere $Q$ und $R$ bezw. $\nu^{ter}$ und $(n-\nu)^{ter}$ Ordnung zerlegen lässt,*

$$P \equiv R(Q),$$

*so erhält man ein Fundamentalsystem der Gleichung $P = 0$ durch ein solches von*

$$Q = 0$$

*$y_1\, y_2 \ldots y_\nu$ und durch je ein Integral $y_{\nu+\alpha}$ der $n - \nu$ nicht homogenen Gleichungen*

$$Q = \eta_{\nu+\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-\nu),$$

*wo $\eta_{\nu+1} \ldots \eta_n$ ein Fundamentalsystem von $R = 0$ ist.*

**90. Zerlegbarkeit eines Differentialausdrucks mit bei $x=0$ zum Teil sich bestimmt verhaltenden Integralen.** Die allgemeinen Ergebnisse des vorigen Artikels wenden wir nunmehr auf die Differentialgleichung (2) bei den im Art. 88 gemachten Voraussetzungen an.

Zu dem Ende bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung (4), wenn sie etwa in die Normalform bei $x = 0$ gesetzt ist, mit

$$A(x, y),$$

und finden demnach einen Differentialausdruck $(n-\nu)^{ter}$ Ordnung $B(x, y)$, sodass Gl. (2) die Form erhält

$$(2^a) \qquad P(x, y) \equiv B(x, A(x, y)) = 0$$
$$\text{oder } P \equiv B(A) = 0.$$

Wie wir wissen, liefert $A = 0$ sämtliche sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende Integrale von $P = 0$ (s. Art. 88). Die übrigen Elemente eines Fundamentalsystems von $(2^a)$ in der Umgebung von $x = 0$ müssen sich daher durchweg unbestimmt verhalten. Daraus folgt, dass auch alle Integrale von

$$B = 0$$

sich bei $x = 0$ unbestimmt verhalten. Ist nämlich $\eta$ ein Integral von $B = 0$, so ist nach vorigem Artikel jedes Integral der nicht homogenen Gleichung

$$A = \eta$$

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 76. S. 259.

ein von den Integralen $y_1\, y_2 \ldots y_\nu$ von $A = 0$ linear unabhängiges Integral von $P = 0$. Wäre nun $\eta$ ein sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltendes Integral, so könnten wir annehmen, dass es logarithmenfrei ist; denn wenn die Differentialgleichung $B = 0$ überhaupt sich bestimmt verhaltende Integrale besitzt, so besitzt sie jedenfalls auch ein solches von der ersten Stufe. Dann würden sich aber auch alle Integrale der nicht homogenen Gleichung $A = \eta$ bestimmt verhalten, da die reducierte Gleichung $A = 0$ bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit und die homogene Gleichung $(\nu + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der alle Integrale von $A = \eta$ genügen, bei $x = 0$ wieder dieselbe Eigenschaft hat (s. Art. 58). Wir würden demnach ein von $y_1\, y_2 \ldots y_\nu$ unabhängiges, sich bestimmt verhaltendes Integral von $P = 0$ finden, was ausgeschlossen ist. Demnach müssen alle Integrale von $B = 0$ sich unbestimmt verhalten[1]).

Wir fassen das Resultat der ganzen Untersuchung in dem Satz zusammen:

*Wenn die Differentialgleichung*

$$P(x, y) = 0$$

*bei der (wesentlich oder ausserwesentlich singulären) Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ genau $\nu$ linear unabhängige, sich bestimmt verhaltende Integrale besitzt, so ist $P(x, y)$ zusammengesetzt aus einem Differentialausdruck $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung $A(x, y)$, der bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat, und aus einem Differentialausdruck $(n - \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung $B(x, y)$, der bei $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit hat*

$$P \equiv B(A).$$

*$A = 0$ hat also nur sich bestimmt verhaltende, $B = 0$ hat nur sich unbestimmt verhaltende Integrale.*

**91. Specialisierung für ausserwesentlich singuläre Stellen. Zerlegbarkeit der Recursionsformel.** Nehmen wir jetzt an, $x = 0$ sei *keine wesentlich singuläre Stelle*, so lässt sich aus dem vorstehenden Resultat noch ein interessanter Schluss in Bezug auf die Recursionsformel und die determinierende Gleichung von $P = 0$ ziehen. Wir knüpfen zu dem Ende zunächst wieder an die allgemeinere Untersuchung in Artikel 89 an und setzen voraus, die Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung $P = 0$, die in $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, werde durch sämtliche Integrale der Differentialgleichung $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung $Q = 0$ befriedigt, welche in $x = 0$ ebenfalls keine wesentlich singuläre

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 326. Satz 8.

Stelle hat. Beide Differentialausdrücke denken wir uns in die Normalform bei $x = 0$ gesetzt

$$(10) \qquad P(x, y) \equiv x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots\cdots + \mathfrak{P}_n y = 0$$

$$(11) \qquad Q(x, y) \equiv x^\nu \mathfrak{Q}_0 y^{(\nu)} + x^{\nu-1} \mathfrak{Q}_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{Q}_\nu y = 0,$$

wo die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gewöhnliche Potenzreihen sind und weder die $\mathfrak{P}$ noch die $\mathfrak{Q}$ für $x = 0$ sämtlich verschwinden.

Nach Artikel 89 giebt es dann einen Differentialausdruck $(n - \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(12) \qquad R(x, y) \equiv r_0 y^{(n-\nu)} + r_1 y^{(n-\nu-1)} + \cdots + r_{n-\nu} y,$$

der bei $x = 0$ ebenfalls keine wesentlich singuläre Stelle hat und derart gestaltet ist, dass

$$(13) \qquad P(x, y) \equiv R(x, Q(x, y)).$$

Seien nun

$$(10^{\text{a}}) \qquad F_{k\alpha} \equiv f_{kk} c_k + f_{k\,k-1} c_{k-1} + \cdots + f_{k\alpha} c_\alpha = 0$$

$$(11^{\text{a}}) \qquad G_{k\alpha} \equiv g_{kk} c_k + g_{k\,k-1} c_{k-1} + \cdots + g_{k\alpha} c_\alpha = 0$$

$$(12^{\text{a}}) \qquad H_{k\alpha} \equiv h_{kk} c_k + h_{k\,k-1} c_{k-1} + \cdots + h_{k\alpha} c_\alpha = 0$$

die Recursionsformeln von bezw. (10), (11), (12), wenn man in jedem dieser Differentialausdrücke substituiert

$$y = \eta = \sum_{(k)} c_k x^k \qquad (k = \alpha, \alpha + 1, \ldots).$$

Ferner sei $\bar{R}(x, y)$ die Normalform, in welche man auch den Differentialausdruck $R(x, y)$ bei $x = 0$ durch Multiplication mit einer geeigneten Potenz von $x$ setzen kann, sodass

$$(14) \qquad \bar{R}(x, y) = x^\lambda R(x, y),$$

wo $\lambda$ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist. Dann ist nach Art. 6 Formel ($5^a$)

$$\left.\begin{aligned}
&(10^{\text{b}}) \qquad P(x, \eta) = \sum_{(k)} F_{k\alpha} x^k \\
&(11^{\text{b}}) \qquad Q(x, \eta) = \sum_{(k)} G_{k\alpha} x^k \\
&(12^{\text{b}}) \qquad R(x, \eta) \equiv \sum_{(k)} H_{k\alpha} x^{k-\lambda}
\end{aligned}\right\} \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \ldots).$$

Setzt man daher in (13) $y = \eta$, so ergiebt sich die linke Seite dieser Identität unmittelbar aus ($10^{\text{b}}$), die rechte Seite aber aus ($12^{\text{b}}$),

wenn man nur statt der $c_k$ $(k=\alpha,\ \alpha+1,\dots)$ in $H_{k\alpha}$ die $G_{k\alpha}$ $(k=\alpha,\ \alpha+1,\dots)$ einsetzt, d. h. es wird

$$(15)\quad R(x,\,Q(x,\eta))\equiv\sum_{(k)}(h_{kk}G_{k\alpha}+h_{k\,k-1}G_{k-1,\alpha}+\cdots+h_{k\alpha}G_{\alpha\alpha})\,x^{k-\lambda}$$
$$(k=\alpha,\ \alpha+1,\dots).$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(16)\qquad h_{kk}G_{k\alpha}+h_{k\,k-1}G_{k-1,\alpha}+\cdots+h_{k\alpha}G_{\alpha\alpha}\equiv H_{k\alpha}(G_{k\alpha}),$$

so hat man also nach (13)

$$(17)\qquad \sum_{(k)}F_{k\alpha}x^k\equiv\sum_{(k)}H_{k\alpha}(G_{k\alpha})\,x^{k-\lambda}\qquad(k=\alpha,\ \alpha+1,\dots).$$

Hier ist links $x^\alpha$ die niedrigste Potenz der Summe; damit dies auch rechts der Fall sei, muss, da $\alpha$ gänzlich unbestimmt ist, $\lambda$ notwendig $=0$ sein. Hieraus folgt aber nach (14), dass der Differentialausdruck $R(x,y)$ selbst schon die *Normalform bei* $x=0$ hat, und die Identität (17) lautet

$$(17^a)\qquad \sum_{(k)}F_{k\alpha}\,x^k\equiv\sum_{(k)}H_{k\alpha}(G_{k\alpha})\,x^k,$$

sodass man weiter die Identitäten

$$(18)\qquad F_{k\alpha}\equiv H_{k\alpha}(G_{k\alpha})\qquad(k=\alpha,\ \alpha+1,\dots)$$

erhält, oder ausführlich geschrieben

$$(18^a)\qquad \begin{aligned} a_{kk}c_k+a_{k\,k-1}c_{k-1}+\cdots+a_{k\alpha}c_\alpha\equiv\\ h_{kk}(g_{kk}c_k+g_{k\,k-1}\,c_{k-1}+\cdots+g_{k\alpha}c_\alpha)\\ +\,h_{k\,k-1}(g_{k-1,\,k-1}c_{k-1}+\cdots+g_{k-1,\,\alpha}c_\alpha)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ +\,h_{k\alpha}g_{\alpha\alpha}c_\alpha\,. \end{aligned}$$

Vergleicht man hierin die mit demselben $c$ multiplicierten Grössen auf beiden Seiten, so ergiebt sich endlich

$$(19)\qquad \begin{cases} a_{kk}\equiv h_{kk}\,g_{kk}\\ a_{k\,k-1}\equiv h_{kk}g_{k\,k-1}+h_{k\,k-1}\,g_{k-1\,k-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Beachten wir noch, dass in der ersten der Identitäten (19) $a_{kk}$, $g_{kk}$, $h_{kk}$ die zu $x=0$ gehörigen determinierenden Functionen von bezw. $P$, $Q$, $R$ sind, so können wir die in diesem Artikel, insbesondere in den Formeln (18) und (19), gewonnenen Resultate folgendermassen aussprechen:

*Wird die Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung $P=0$, welche bei $x=0$ keine wesentlich singuläre Stelle und die Normalform hat, durch*

*alle Integrale der Differentialgleichung* $\nu^{ter}$ *Ordnung* $Q=0$ *erfüllt, welche bei* $x=0$ *ebenfalls keine wesentlich singuläre Stelle und die Normalform hat, so ist*

$$P = R(Q),$$

*wo* $R$ *ein Differentialausdruck* $(n-\nu)^{ter}$ *Ordnung ist, welcher wiederum bei* $x=0$ *keine wesentlich singuläre Stelle und die Normalform hat. Die Recursionsformel von* $P=0$ *ist aus denen von* $Q=0$ *und* $R=0$ *zusammengesetzt*

$$F_{k\alpha} = H_{k\alpha}(G_{k\alpha}),$$

*und die determinierende Function von* $P$ *ist das Produkt derjenigen von* $Q$ *und* $R$

$$a_{kk} = g_{kk}\, h_{kk}.\text{[1]}$$

Wenden wir diesen Satz auf unser Ausgangsproblem an, wobei $P=0$ in $x=0$ eine Stelle der Unbestimmtheit haben, aber trotzdem ein Teil der Integrale bei $x=0$ bestimmtes Verhalten zeigen sollte, so ergiebt sich unmittelbar daraus, dass dann $Q$ (oder $A$ in Artikel 90) in $x=0$ eine Bestimmtheitsstelle haben musste, der Satz[2]):

*Die Anzahl der linear unabhängigen, sich bei* $x=0$ *bestimmt verhaltenden Integrale der Differentialgleichung* $P(x,y)=0$, *die in* $x=0$ *keine wesentlich singuläre Stelle hat, ist höchstens gleich dem Grade der determinierenden Function von* $P(x,y)$ *und genau gleich demselben, wenn bei der Zerlegung*

$$P = B(A),$$

*wo* $A$ *in* $x=0$ *eine Bestimmtheitsstelle hat, die determinierende Function von* $B$ *eine Constante ist.*

Den ersten Teil dieses Satzes hätten wir auch so erschliessen können: Wenn die Differentialgleichung $P=0$ $\nu$ linear unabhängige, sich bei $x=0$ bestimmt verhaltende Integrale besitzt, darf man annehmen (s. Art. 71), dass nicht zwei von ihnen zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten gehören. Dann muss aber die determinierende Gleichung nach Artikel 60 mindestens $\nu^{ten}$ Grades sein.

**92. Zerlegung eines Differentialausdruckes in Differentialausdrücke erster Ordnung.** Obwohl das für das gegenwärtige Kapitel aufgestellte Problem bereits seiner Lösung zugeführt ist, wollen wir die *Zerlegung von Differentialausdrücken*, welche bei jener Untersuchung als Mittel diente, noch etwas weiter verfolgen.

---

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 321.

2) Ebenda S. 330. 2.

Die Differentialgleichung

$$(20) \qquad P(x, y) = 0$$

habe in der Umgebung $U$ von $x = 0$ *eindeutige Coefficienten*, gleich viel welcher Art die Stelle $x = 0$ im übrigen sei. Nach Kapitel XII giebt es dann jedenfalls ein innerhalb $U$ gültiges Fundamentalsystem

$$y_1\, y_2 \ldots y_n,$$

das in Untergruppen eingeteilt ist, sodass bei einem Umlauf um $x = 0$ jedes Integral sich mit einer von Null verschiedenen Constanten multipliciert und höchstens noch um eine lineare homogene Function der vorangehenden Integrale vermehrt (wenn wir uns nämlich in der Folge von $y_1$ zu $y_n$ die Elemente jeder Untergruppe nach *wachsender* Stufenzahl geordnet denken). Diese Eigenschaft bleibt also bestehen, wenn wir am Ende der Reihe $y_1\, y_2 \ldots y_n$ eine beliebige Anzahl von Integralen streichen. Nach einem Satz des Artikel 72 genügt daher jedes der Functionssysteme

$$y_1\, y_2 \ldots y_{\lambda-1} y_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

einer linearen homogenen Differentialgleichung bezw. $\lambda^{\text{ter}}$ Ordnung, welche bei $x = 0$ eindeutige Coefficienten hat.

Bezeichnen wir die Differentialgleichung für die Integrale

$$y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}$$

mit

$$P' = 0,$$

so ist nach Art. 89 $P$ zerlegbar in $P'$ und einen Differentialausdruck erster Ordnung $P_n$ mit ebenfalls bei $x = 0$ eindeutigen Coefficienten

$$P \equiv P_n(P')$$

oder kurz geschrieben

$$P \equiv P_n P'.$$

$P'$ ist aber wieder zerlegbar in einen Differentialausdruck $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $P''$, wenn nämlich $P'' = 0$ die Gleichung für $y_1\, y_2 \ldots y_{n-2}$ ist, und einen Differentialausdruck erster Ordnung $P_{n-1}$

$$P' \equiv P_{n-1} P'',$$

sodass

$$P \equiv P_n P_{n-1} P''.$$

So fortfahrend gelangt man zu der Zerlegung von $P$ in $n$ Differentialausdrücke erster Ordnung $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$, die sämtlich bei $x = 0$ eindeutige Coefficienten haben,

$$(21) \qquad P \equiv P_n P_{n-1} \ldots P_2 P_1.$$

$P_1 = 0$ liefert also das Integral $y_1$, $P_2 P_1 = 0$ wird ausser durch $y_1$ noch durch $y_2$ befriedigt u. s. w.

Wir haben also den Satz:

*Jeder Differentialausdruck $n^{ter}$ Ordnung*

$$P(x, y)$$

*mit in der Umgebung von $x = 0$ eindeutigen Coefficienten lässt sich in $n$ Differentialausdrücke erster Ordnung mit ebenfalls bei $x = 0$ eindeutigen Coefficienten*

$$P = P_n P_{n-1} \ldots P_2 P_1$$

*zerlegen.*

Nehmen wir insbesondere an, dass $P$ bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat, so gilt nach Kap. X das Gleiche auch von jedem der Differentialausdrücke

$$P_1, \; P_2 P_1, \ldots, P_{n-1} \ldots P_2 P_1 .$$

Folglich kann zunächst $P_2$ in $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle haben, da $P_1$ und $P_2 P_1$ in $x = 0$ eine ausserwesentlich singuläre Stelle haben (Art. 89). Ebenso erschliesst man, dass $P_3, \ldots, P_n$ in $x = 0$ nur eine ausserwesentlich singuläre Stelle haben. Da nun aber der Grad der determinierenden Function von $P_2 P_1$ 2, der von $P_1$ 1 und nach Artikel 91 der Grad der determinierenden Function von $P_2 P_1$ die Summe der Grade der determinierenden Functionen von $P_1$ und $P_2$ ist, so folgt, dass dieser Grad auch bei $P_2$ den Wert 1 hat. d. h. dass $P_2$ ebenfalls in $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat. Das Gleiche ergiebt sich für $P_3, \ldots, P_n$, und wir haben das Resultat [1]):

*Hat der Differentialausdruck $n^{ter}$ Ordnung $P(x, y)$ in $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, so gilt dasselbe von den Differentialausdrücken erster Ordnung*

$$P_1, \; P_2, \ldots, P_{n-1}, \; P_n,$$

*aus denen man $P$ zusammensetzen kann.*

Die Zerlegung eines Differentialausdrucks in Differentialausdrücke erster Ordnung, — die man auch *Zerlegung in symbolische Primfaktoren* genannt hat [2]) — erinnert nun wieder auf das Lebhafteste an die Zerlegung einer ganzen rationalen Function in Linearfaktoren, nur dass diese symbolischen Faktoren im allgemeinen nicht untereinander vertauschbar sind. Wie aber die Zerlegung einer ganzen Function in Linearfaktoren nur möglich ist, wenn man den Coefficienten der letzteren den weitesten Spielraum lässt, — es sind ja die Wurzeln der algebraischen Gleichung — also wenn man nach der Kronecker'schen Ausdrucksweise die Wurzeln der Gleichung selbst dem Rationalitätsbereich adjungiert, so ist die Zerlegbarkeit auch hier (nach dem all-

1) Vgl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 325. 5.

2) Floquet, Annales de l'école normale, 2me série, t. 8. (1879). Suppl. S. 79.

gemeinen Satz dieses Artikels) nur so möglich, dass von den Coefficienten der Primfaktoren lediglich die *Eindeutigkeit* ausgesagt werden kann. Die Eindeutigkeit war aber auch das Einzige, was dabei von den Coefficienten des Differentialausdrucks $P(x, y)$ selbst vorausgesetzt wurde. Bleibt man also hierbei stehen, so ist es unmöglich, für lineare Differentialgleichungen eine der *Irreduktibilität* und *Reduktibilität* algebraischer Gleichungen analoge Eigenschaft zu definieren. Wollen wir zu einem solchen Begriff gelangen, so müssen wir daher mindestens die erste mögliche Einschränkung treffen, nämlich die, dass $x = 0$ *keine wesentlich singuläre Stelle* sein soll.

**93. Reduktibilität linearer Differentialgleichungen.** *Ist*

$$P(x, y) = 0 \tag{22}$$

*eine Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung, die in $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, so nennen wir dieselbe „bei der Stelle $x = 0$ reduktibel", wenn sie mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung von derselben Beschaffenheit*

$$Q(x, y) = 0 \tag{23}$$

*ein Integral gemein hat, andernfalls „irreduktibel bei $x = 0$"* [1]).

Angenommen $P = 0$ sei reduktibel, und die Differentialgleichung niedrigerer ($\nu^{ter}$) Ordnung $Q = 0$, mit der sie *ein* Integral $\eta$ gemein hat, sei *irreduktibel.* Nach Artikel 89 können wir $P$ in die Form setzen

$$P = R(Q) + S, \tag{24}$$

wo $R$ und $S$ bei $x = 0$ wieder keine wesentlich singuläre Stelle haben, $R$ von der Ordnung $n - \nu$ und $S$ höchstens von der Ordnung $\nu - 1$ ist. Setzt man in (24) $y = \eta$, so verschwinden $Q$ und $P$, folglich muss auch

$$S(x, \eta) = 0$$

sein. Da aber $Q = 0$ irreduktibel sein sollte, also mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $S = 0$, die bei $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, kein Integral gemein haben kann, muss für jeden Wert von $y$

$$S(x, y) = 0$$

sein, d. h. wir haben

$$P = R(Q)$$

oder den Satz [2]):

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 322. Zu unterscheiden hiervon ist die auch von Frobenius (ebenda, Bd. 76. S. 237) gegebene Definition. S. auch Koenigsberger (ebenda Bd. 96. (1884). S. 123).

2) Dieser und der folgende Satz sind nebst ihrer Ableitung nahezu wörtlich von Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80, S. 257 u. 258, entnommen.

*Wenn eine lineare Differentialgleichung mit einer irreduktibl rentialgleichung ein Integral gemein hat, so wird sie durch sämt tegrale derselben erfüllt.*

Sind

$$P = 0 \quad \text{und} \quad P_1 = 0$$

zwei Differentialgleichungen bezw. $n^{\text{ter}}$ und $n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung, die b keine wesentlich singuläre Stelle haben, so kann man die F und bezw. welche Integrale sie gemein haben, durch ein V entscheiden, welches demjenigen zur Aufsuchung des grössten samen Teilers zweier ganzen Zahlen oder zweier ganzen Fu völlig analog ist. Es sei $n \geqq n_1$; dann können wir die K Identitäten bilden

$$(25) \qquad \begin{cases} P \quad \equiv R_1(P_1) + P_2 \\ P_1 \quad \equiv R_2(P_2) + P_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_{i-1} \equiv R_i(P_i) + P_{i+1}, \end{cases}$$

wo alle $P$ und $R$ bei $x = 0$ immer wieder dieselbe Besch haben, und, wenn $n_k$ die Ordnung von $P_k$ ist, die Ungleichu

$$n \geqq n_1 > n_2 > \cdots > n_i > n_{i+1}$$

bestehen, die zur Folge haben, dass man endlich zu einem ve denden $n_k$ gelangt, nämlich spätestens für $k = n_1 + 1$. Es das erste verschwindende $n_k$, sodass $P_{i+1}$ ein Differentialausd Ordnung ist, d. h.

$$(26) \qquad P_{i+1} \equiv \varphi(x)\, y\,.$$

Nach (25) muss nun jedes Integral, das $P = 0$ und $P_1 = 0$ sam ist, auch $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ u. s. w., endlich auch $P_i =$ $P_{i+1} = 0$ erfüllen, und umgekehrt ist jedes gemeinsame dieser beiden ein solches von $P = 0$ und $P_1 = 0$. Ist daher $\varphi(x)$ von Null verschieden, so haben $P = 0$ und $P_1 = 0$ triviale Integral $y \equiv 0$ gemein. Ist aber $\varphi(x) \equiv 0$, so sind tegrale von

$$P_i = 0$$

auch Integrale von $P = 0$ und $P_1 = 0$. Hieraus folgt:

*Wenn eine lineare Differentialgleichung reduktibel ist, so eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren sämtliche der vorgelegten genügen.*

Ist nun die Gleichung $Q = 0$, deren sämtliche Integral erfüllen, selbst wieder reduktibel, so giebt es eine Differential noch niedrigerer Ordnung, deren sämtliche Integrale $Q = 0$ u

$P=0$ erfüllen; u. s. w., bis man zu einer irreduktiblen Gleichung $T_1=0$ gelangt, deren sämtliche Integrale $P=0$ genügen, sodass

$$P\equiv S(T_1).$$

Ebenso kann man aber auch die Gleichung $S=0$ und folglich den Differentialausdruck $S$ behandeln; u. s. w. So kann man schliesslich $P$ in die Form bringen

$$P\equiv T_\lambda T_{\lambda-1}\dots T_2 T_1,$$

wo $T_\lambda, T_{\lambda-1},\dots, T_2, T_1$ lauter irreduktible Differentialausdrücke sind, deren Ordnungszahlen die Summe $n$ haben. Also:

*Ein reduktibler Differentialausdruck $n^{ter}$ Ordnung $P(x,y)$, der bei $x=0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, kann in eine Anzahl irreduktibler symbolischer Faktoren zerlegt werden, sodass die Summe von deren Ordnungszahlen gleich der Ordnung $n$ von $P$ ist.*

Einen Specialfall dieses Satzes haben wir bereits in dem zweiten Satz des Artikels 92 kennen gelernt.

**94. Nachweis der Existenz irreduktibler Differentialgleichungen**[1]. Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass es in der That *irreduktible lineare Differentialgleichungen jeder Ordnung* überhaupt giebt, da dies ja aus dem Vorhergehenden noch nicht zu ersehen ist. Wir brauchen zu dem Ende nur nachzuweisen, dass es Differentialausdrücke $n^{ter}$ Ordnung giebt, die nicht in zwei andere zerlegt werden können.

Die Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung

$$P(x,y)\equiv x^n\mathfrak{P}_0 y^{(n)}+x^{n-1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)}+\dots+\mathfrak{P}_n y=0, \tag{27}$$

welche bei $x=0$ die Normalform habe, sei so beschaffen, dass in der zugehörigen Recursionsformel

$$F_{k\alpha}\equiv a_{kk}c_k+a_{k\,k-1}c_{k-1}+\dots+a_{k\alpha}c_\alpha=0 \tag{28}$$

$a_{kk}$ von $k$ unabhängig ist, $a_{k\,k-1}$ aber den höchsten möglichen, nämlich den $n^{ten}$ Grad in $k$ hat. Diese Bedingungen sind leicht zu erfüllen. Damit $a_{kk}$ vom $0^{ten}$ Grad in $k$ sei, ist notwendig und hinreichend (s. Art. 8), dass

$$\mathfrak{P}_0(0)=0,\dots,\mathfrak{P}_{n-1}(0)=0,\quad \mathfrak{P}_n(0)\neq 0. \tag{29}$$

Nach Artikel 6 (7) ist

$$a_{k\,k-1}=\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\mathfrak{p}_{\nu 1}(k-1)(k-2)\dots(k-n+\nu),$$

wo

$$\mathfrak{p}_{\nu 1}\equiv\mathfrak{P}_\nu'(0).$$

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 332. 333.

Damit also $a_{kk-1}$ vom $n^{\text{ten}}$ Grad in $k$ sei, ist notwendig und
chend, dass

(30) $$\mathfrak{P}_0'(0) \neq 0.$$

Wir sehen also zunächst:

*Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zu $x = 0$ gehörigen Recursionsformel $F_{k\alpha} = 0$ von $P(x, y)$ $a_{kk-1}$ vom $n^{\text{ten}}$ Grad sei, bestehen darin, dass die Differentialg die Gestalt hat*

(27ᵃ) $$P(x,y) = x^{n+1}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^n \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + x^2 \mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y,$$

*wo $\mathfrak{P}_0\ \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind und $\mathfrak{P}_0$ für $x = 0$ nicht verschwinden.*

Von Differentialgleichungen, in deren zu $x = 0$ gehöriger sionsformel (28) $a_{kk}$ vom $0^{\text{ten}}$, $a_{kk-1}$ vom $n^{\text{ten}}$ Grad ist, ist al zu zeigen, dass sie bei $x = 0$ irreduktibel sind. Wäre nämli Differentialausdruck $P(x, y)$ einer solchen Gleichung zerlegbar Differentialausdrücke niedrigerer, $\nu^{\text{ter}}$ und $(n-\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung be den Recursionsformeln

$$G_{k\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad H_{k\alpha} = 0,$$

so wäre, wenn alle drei Differentialausdrücke die Normalform nach der ersten der Gleichungen (19)

$$a_{kk} = h_{kk} g_{kk},$$

also $h_{kk}$ und $g_{kk}$ wie $a_{kk}$ vom $0^{\text{ten}}$ Grad in $k$. In der zwei Gleichungen (19)

$$a_{kk-1} = h_{kk} g_{kk-1} + h_{kk-1} g_{k-1k-1}$$

wäre aber rechts $g_{kk-1}$ höchstens $\nu^{\text{ten}}$, $h_{kk-1}$ höchstens $(n-\nu)^{\text{ten}}$ also die rechte Seite jedenfalls von niedrigerem als dem $n^{\text{ten}}$ während links $a_{kk-1}$ $n^{\text{ten}}$ Grades ist. Die Gleichung $P = 0$ is irreduktibel bei $x = 0$, wenn sie die Gestalt (27ᵃ) hat, und wir den Satz:

*Die Gleichung*

$$x^{n+1}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^n \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + x^2 \mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0$$

*wo $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind und*

$$\mathfrak{P}_0(0) \neq 0, \quad \mathfrak{P}_n(0) \neq 0,$$

*ist bei $x = 0$ irreduktibel*[1]).

**95. Beispiele.** Wir wollen noch einige Beispiele für die F sich bestimmt verhaltender Integrale bei einer Stelle der Unbe

1) Vergl. **Floquet**, Annales de l'école norm., 2ᵐᵉ série, t. 8. (1879). Su

heit und für die Reduktibilität linearer Differentialgleichungen folgen lassen.

Schon in Artikel 23 zeigte das zweite Beispiel

$$(31) \qquad P(x, y) \equiv x^3y'' + xy' - x(1 + x^2)y = 0$$

die Existenz eines sich bei der Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ bestimmt verhaltenden Integrals

$$y = e^x.$$

Wir wissen jetzt, dass Gleichung (31) infolge dessen reduktibel sein muss. In der That genügt $y = e^x$ der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' - y = 0$$

oder in Normalform geschrieben

$$(32) \qquad Q(x, y) \equiv xy' - xy = 0,$$

und man findet leicht, dass

$$P(x, y) \equiv R(x, Q(x, y)),$$

wenn

$$R(x, y) \equiv x^2y' + (1 - x + x^2)y.$$

Die Recursionsformeln von $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ lauten bezw. (s. Art. 23)

$$F_{k\alpha} \equiv kc_k - c_{k-1} + (k-2)[(k-1)c_{k-1} - c_{k-2}] + (k-2)c_{k-2} - c_{k-3} = 0$$
$$G_{k\alpha} \equiv kc_k - c_{k-1} = 0$$
$$H_{k\alpha} \equiv c_k + (k-2)\,c_{k-1} + c_{k-2} = 0,$$

sodass

$$F_{k\alpha} \equiv H_{k\alpha}(G_{k\alpha})$$

und

$$a_{kk} \equiv h_{kk}\,g_{kk}$$

oder

$$k \equiv 1 \,.\, k,$$

da hier $h_{kk} = 1$ ist. Dies ist mit den allgemeinen Formeln in Art. 91 in Uebereinstimmung.

*2. Beispiel.* Das dritte Beispiel in Artikel 23

$$(33) \qquad P(x, y) \equiv x^3y'' + x(2x - 1)y' + y = 0$$

hat bei $x = 0$, obwohl die determinierende Function ersten Grades ist, kein sich bestimmt verhaltendes Integral, wie dort (S. 44) nachgewiesen wurde. Die Zerlegbarkeit der zugehörigen Recursionsformel

$$F_{k\alpha} \equiv (k - 1)[- c_k + kc_{k-1}] \equiv (k - 1)\,G_{k\alpha} = 0,$$

wo

$$G_{k\alpha} \equiv - c_k + k\,c_{k-1},$$

lässt aber vermuten, dass die Gleichung reduktibel ist. In der That ist

$$Q(x,y) = x^2 y' + (x - 1) y = 0$$

eine Differentialgleichung mit der Recursionsformel $G_{k\alpha} = 0$ un

$$P(x,y) = R(x, Q(x,y)),$$

wenn

$$R(x,y) = xy' - y,$$

wo die Recursionsformel von $R = 0$

$$H_{k\alpha} = (k - 1) c_k = 0$$

lautet, sodass

$$F_{k\alpha} = H_{k\alpha}(G_{k\alpha}).$$

Die Gleichung (33) ist also wirklich reduktibel. Während abe der Zerlegung von (31), welche ein sich bestimmt verhaltendes In besitzt, der *innere* Differentialausdruck $Q$ die Bestimmtheitsgestal und der *äussere* $R$ die der Unbestimmtheit, ist es bei (33) umgek

Da $R = 0$ das Integral $y = x$ hat, sind die Integrale von die von

$$Q = x^2 y' + (x - 1) y = 0$$

und

$$Q - x = x^2 y' + (x - 1) y - x = 0.$$

$Q = 0$ liefert das Integral

$$y_1 = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Das Integral von $Q - x = 0$ setzt man in der Gestalt an

$$y_2 = f(x) y_1$$

und findet dann durch Substitution in die Gleichung $Q - x = 0$

$$f(x) = \int e^{\frac{1}{x}} dx$$

sein muss. Demnach sind die Integrale von $P = 0$

$$y_1 = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}, \quad y_2 = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \int e^{\frac{1}{x}} dx$$

beide unbestimmt bei $x = 0$, wie es die Theorie erfordert.

*3. Beispiel.* Endlich noch ein Beispiel zur Illustration de ziehung zwischen den determinierenden Functionen zweier Differ ausdrücke und des aus jenen zusammengesetzten Differentialausd

Bildet man aus

$$Q = x^2 y'' + x^2 y' + xy$$
$$R = xy' + y,$$

1) Es wäre eine wünschenswerte Ergänzung dieser Theorie, wenn si weisen liesse, dass eine Differentialgleichung, deren determinierende Fu keine Constante ist, stets reduktibel ist. Dieser Beweis ist, soviel der V weiss, bisher noch nicht erbracht worden.

elche die Normalform haben und deren determinierende Functionen ezw.

$$g_{kk} \equiv k(k-1)$$

$$h_{kk} \equiv k+1$$

nd, den Differentialausdruck

$$P \equiv R(Q) \equiv x^3y''' + x^2(3+x)y'' + 4x^2y' + 2xy$$

it der determinierenden Function

$$a_{kk} \equiv k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) \equiv (k+1)k(k-1),$$

hat auch $P$ die Normalform, und es ist in der That

$$a_{kk} \equiv h_{kk}\, g_{kk}\,.$$

## Kapitel XIV.

### Die Integrale in der Umgebung unendlich grosser Werte der unabhängigen Variablen.

**96. Transformation mittelst reciproker Radien.** Wir haben bisher für die Umgebung aller endlichen Werte von $x$, zu denen in Bezug auf die Differentialgleichung eine Umgebung überhaupt gehört, die analytische Gestalt und das Verhalten der Integrale ermittelt, die unendlich grossen Werte von $x$ aber noch gar nicht in den Kreis unserer Betrachtung gezogen. Die vollständige Untersuchung der Integralfunction erfordert daher noch ein Eingehen auf die letzteren.

Es sei

$$P(x, y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0 \tag{1}$$

die vorgelegte Differentialgleichung. Wir substituieren nun — wie häufig in der Analysis, wenn es sich um die Untersuchung einer Function für unendlich grosse Werte ihrer Variablen handelt — in (1)

$$x = \frac{1}{z} \tag{2}$$

und führen dadurch für $x$ die neue unabhängige Veränderliche $z$ ein, oder *wir bilden*, wie man auch sagt, *die $x$-Ebene mittelst reciproker Radien auf eine $z$-Ebene ab.* Jedem endlichen von Null verschiedenen Wert von $x$ entspricht ein bestimmter endlicher von Null verschiedener Wert von $z$ und umgekehrt; jedem unendlich grossen Wert von $x$ aber der eine Wert $z = 0$ und umgekehrt jedem unendlich grossen Wert von $z$ der eine Wert $x = 0$. Ferner entspricht jedem Kreis mit dem Mittelpunkt $x = 0$ ein solcher mit dem Mittelpunkt $z = 0$ und reciprokem Radius und umgekehrt. Aber dem Innern eines Kreises in der $x$-Ebene entspricht der ausserhalb des entsprechenden Kreises liegende Teil der $z$-Ebene und umgekehrt.

Man kann sich von dieser Zuordnung zwischen den Punkten der $x$-Ebene und denen der $z$-Ebene mittelst reciproker Radien auf folgende Art geometrisch ein sehr anschauliches Bild machen (s. Fig. 3). Die $x$-Ebene und $z$-Ebene mögen in ihren Nullpunkten eine Kugel

mit dem Durchmesser 1 in zwei diametralen Punkten berühren und dabei eine solche Lage haben, dass die reellen Axen beider Ebenen gleichlaufend, die imaginären Axen aber ungleichlaufend parallel sind.

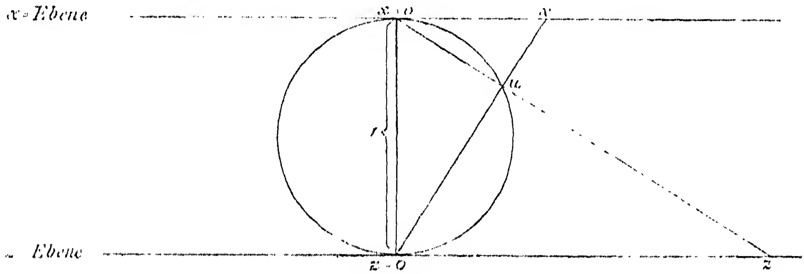


Fig. 3.

Um zu irgend einem Punkt $x$ nun den zugeordneten $z=\frac{1}{x}$ zu finden, braucht man nur $x$ mit $z=0$ zu verbinden, wodurch ein bestimmter Punkt $u$ auf der Kugel ausgestochen wird. Verbindet man dann $x=0$ mit $u$, so trifft diese Gerade die $z$-Ebene in dem Punkt $z=\frac{1}{x}$. Der Beweis ist leicht zu führen.

Aus dem Grunde, weil bei dieser Abbildung *jedem* unendlich grossen Wert von $x$ der *eine* bestimmte Wert $z=0$ zugeordnet ist, spricht man gelegentlich auch schon bei der $x$-Ebene selbst von *dem unendlich fernen Punkt der $x$-Ebene* und belegt diesen mit dem Zeichen $x=\infty$.

**97. Die transformierte Differentialgleichung.** Um nun die Transformation der Differentialgleichung (1) mittelst der Substitution (2) wirklich auszuführen, hat man einmal in allen Coefficienten $p$ $x$ durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen und ausserdem die Ableitungen

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

durch

$$\frac{dy}{dz},\ \frac{d^2y}{dz^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dz^n} \text{ und } z$$

auszudrücken. Für Letzteres erhält man die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} -\frac{dy}{dx}=z^2\frac{dy}{dz} \\ \frac{d^2y}{dx^2}=z^4\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz} \\ -\frac{d^3y}{dx^3}=z^6\frac{d^3y}{dz^3}+6z^5\frac{d^2y}{dz^2}+6z^4\frac{dy}{dz} \\ \qquad\text{u. s. w.} \end{cases}$$

allgemein

$$(4)\qquad (-1)^\lambda \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} =$$
$$z^{2\lambda}\frac{d^\lambda y}{dz^\lambda} + 1!\binom{\lambda}{1}\binom{\lambda-1}{1} z^{2\lambda-1}\frac{d^{\lambda-1}y}{dz^{\lambda-1}} + \cdots + (\lambda-1)!\binom{\lambda}{\lambda-1}\binom{\lambda-1}{\lambda-1} z^{\lambda+1}\frac{dy}{dz}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Die Richtigkeit der allgemeinen Formel ergiebt sich durch die Methode der vollständigen Induction: Angenommen, (4) wäre richtig bis zu irgend einem Wert von $\lambda$. Differenziert man dieselbe einmal nach $x$ und beachtet, dass man dazu rechts zunächst nach $z$ differenziert und dann mit $\frac{dz}{dx} = -z^2$ multipliciert, so hat man nach Multiplication mit $-1$ links

$$(-1)^{\lambda+1}\frac{d^{\lambda+1}y}{dx^{\lambda+1}}$$

und rechts lauter positive Glieder. Dasjenige mit der höchsten Ableitung wird

$$z^{2\lambda+2}\frac{d^{\lambda+1}y}{dz^{\lambda+1}}.$$

Als Coefficient einer beliebigen Ableitung

$$\frac{d^{\lambda-k}y}{dz^{\lambda-k}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \lambda-1)$$

erhält man aber

$$\left[k!\binom{\lambda}{k}\binom{\lambda-1}{k}(2\lambda-k) + (k+1)!\binom{\lambda}{k+1}\binom{\lambda-1}{k+1}\right] z^{2\lambda-k+1}$$
$$= (k+1)!\binom{\lambda+1}{k+1}\binom{\lambda}{k+1} z^{2\lambda-k+1},$$

womit bewiesen ist, dass (4) auch gilt, wenn man $\lambda$ durch $\lambda+1$ ersetzt. Da aber die Formel (4) für $\lambda = 1, 2, 3$ richtig ist, so ist ihre allgemeine Gültigkeit dargethan.

Demnach lautet die durch (2) transformierte Differentialgleichung nach Multiplication mit $(-1)^n$

$$(5)\qquad z^{2n}\frac{d^n y}{dz^n}$$
$$+ z^{2n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}\left[1!\binom{n}{1}\binom{n-1}{1} - \frac{1}{z}p_1\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$
$$+ z^{2n-2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}}\left[2!\binom{n}{2}\binom{n-1}{2} - 1!\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{1}\frac{1}{z}p_1\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}p_2\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ z^{n+1}\frac{dy}{dz}\left[(n-1)!\binom{n}{n-1}\binom{n-1}{n-1} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{z^{n-1}}p_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$
$$+ z^n y\left[(-1)^n\frac{1}{z^n}p_n\left(\frac{1}{z}\right)\right] = 0,$$

oder kurz geschrieben

$$\sum_{k=0}^{k=n} z^{2n-k} \frac{d^{n-k} y}{d z^{n-k}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} (-1)^{\lambda} (k-\lambda)! \binom{n-\lambda}{k-\lambda} \binom{n-\lambda-1}{k-\lambda} \frac{1}{z^{\lambda}} p_{\lambda}\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

wo

$$p_0 \equiv 1.$$

Da der Coefficient der höchsten Ableitung in dieser transformierten Gleichung $z^{2n}$ ist und die übrigen Coefficienten linear in den mit Potenzen von $z$ multiplicierten Grössen

$$p_1\left(\frac{1}{z}\right), \ldots, p_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

sind, hat (5) als singuläre Stellen im Endlichen nur die reciproken Werte der endlichen singulären Stellen von (1), *ausserdem aber im allgemeinen noch $z=0$ als singuläre Stelle.* Die Umgebung von $z=0$ ist der Kreis um $z=0$, der durch den dem Punkt $z=0$ am nächsten liegenden singulären Punkt von (5) hindurchgeht, bezw. der Kreisring, der aus diesem Kreis durch Ausschluss von $z=0$ selbst entsteht. Da aber $z=0$ dem $x=\infty$ entspricht, werden wir als *Umgebung von $x=\infty$ in Bezug auf die Differentialgleichung* (1) das dem eben beschriebenen nach der Transformation (2) entsprechende Gebiet der $x$-Ebene bezeichnen müssen. Wir sprechen daher das Ergebnis der bisherigen Untersuchung folgendermassen aus:

*Die durch die Substitution* (2)

$$x = \frac{1}{z}$$

*aus* (1) *entstehende transformierte Gleichung* (5) *zeigt, dass $x=\infty$ im allgemeinen die Rolle einer singulären Stelle für die Differentialgleichung* (1) *spielt und dass als Umgebung von $x=\infty$ der Teil der $x$-Ebene zu definieren ist, der ausserhalb des Kreises um $x=0$ liegt, welcher durch den von $x=0$ am weitesten entfernten singulären Punkt von* (1) *hindurchgeht.*

**98. Allgemeine Gestalt der Integrale in der Umgebung von $x=\infty$.** Nach dem Vorstehenden ist nunmehr leicht festzustellen, welches im allgemeinen die analytische Gestalt der Integrale von (1) in der Umgebung $U_\infty$ von $x=\infty$ ist. Wir können hierbei entweder von Differentialgleichung (5) ausgehen und in dem bei $z=0$ sich ergebenden Fundamentalsystem $z=\frac{1}{x}$ setzen oder aber direkt die innerhalb des Kreisringes $U_\infty$ gültigen Integrale von (1) aufsuchen.

Auf dem ersteren Wege findet man, dass die Integrale von (5) in der Umgebung von $z=0$ in der Form enthalten sind

(6) $$y = z^s\left[\psi_\sigma(z) + \binom{\sigma}{1}\psi_{\sigma-1}(z)\log z + \cdots + \psi_0(z)\log^\sigma z\right],$$

wo die in der Umgebung von $z=0$ eindeutigen Reihen $\psi$ im allgem
unendlich viele negative und positive Potenzen von $z$ enthalten.
man also $z = \frac{1}{x}$, so folgt

$$y = x^{-s}\left[\psi_\sigma\left(\frac{1}{x}\right) - \binom{\sigma}{1}\psi_{\sigma-1}\left(\frac{1}{x}\right)\log x + \cdots + (-1)^\sigma \psi_0\left(\frac{1}{x}\right)\log^\sigma x\right].$$

Bezeichnet man hierin $-s$ mit $r$ und

$$(-1)^k\psi_{\sigma-k}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ mit } \varphi_{\sigma-k}(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, \sigma),$$

so ist

(7) $$y = x^r\left[\varphi_\sigma(x) + \binom{\sigma}{1}\varphi_{\sigma-1}(x)\log x + \cdots + \varphi_0(x)\log^\sigma x\right],$$

wo die $\varphi$ im allgemeinen unendlich viele positive und negativ
tenzen von $x$ enthalten. Gerade diese Gestalt der Integrale
man ja aber auch, wenn man direkt nach einem in dem
ring $U_\infty$ gültigen Fundamentalsystem der Gleichung (1) fragt.
Wege führen daher, wie es notwendig ist, zu demselben Re
Nur einen Fingerzeig gewinnen wir bei der ersten Methode, de
die zweite nicht giebt: da bei (5) $z=0$ an die Stelle von $x=\infty$
(1) getreten ist und wir gewohnt sind, die Reihen $\psi(z)$ in
nach *steigenden* Potenzen von $z$ geordnet zu denken, so werde
dazu geführt, die Reihen $\varphi(x)$ in (7), d. h. bei dem in der Umge
von $x = \infty$ gültigen Fundamentalsystem, uns *nach fallenden Po
von $x$* geordnet vorzustellen. An und für sich ist es natürlich
gleichgültig, ob wir uns hierzu verstehen oder nicht; es tritt m
dieser Auffassung schon äusserlich ein Unterschied zwischen de
$x = \infty$ und den bei $x = 0$ gültigen Reihen hervor, der unabh.
davon ist, ob sich die Reihen bei diesen Stellen (Vgl. Art. 100
stimmt verhalten oder nicht.

*In der Umgebung $U_\infty$ von $x = \infty$ haben die Integrale der
chung* (1) *im allgemeinen die Gestalt*

$$y = x^r\left[\varphi_\sigma + \binom{\sigma}{1}\varphi_{\sigma-1}\log x + \cdots + \varphi_0\log^\sigma x\right],$$

*wo die $\varphi$ nach fallenden Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen sin
im allgemeinen unendlich viele positive und negative Potenzen enth*

**99. Mannigfaltigkeit des zu $x = \infty$ gehörigen Fundame
systems; Invarianz seiner Einteilung in Untergruppen.** Da wi
obige Form der Integrale und des ganzen zu $U_\infty$ gehörigen F
mentalsystems mit Hilfe der Fundamentalgleichung finden, so ist

selbe in bestimmter Weise in Untergruppen eingeteilt. Bei dieser Gelegenheit wollen wir darauf aufmerksam machen, dass die Substitution (2) durch unendlich viele andere ersetzt werden kann, die auch zum Ziel führen, dass wir dabei jedesmal eine *andere* Umgebung der unendlich grossen Werte von $x$ und ein anderes Fundamentalsystem erhalten, dass aber die Einteilung desselben in Untergruppen stets ein und dieselbe ist.

In der That, wenn $a$ ein ganz beliebiger endlicher Wert ist, konnten wir statt (2) die Substitution

$$(2^a) \qquad x - a = \frac{1}{z}.$$

benutzen. Es entsprechen dann wieder alle unendlich grossen Werte von $x$ dem Wert $z = 0$, aber den Kreisen um $z = 0$ nunmehr solche um $x = a$. Demnach erhalten wir statt $U_\infty$ eine Umgebung $U_{\infty a}$ mit dem Mittelpunkt $x = a$, nach $a$ zu begrenzt durch einen Kreis um $a$, der durch den von $a$ am weitesten entfernten endlichen singulären Punkt von (1) hindurchgeht, und die Reihen des innerhalb $U_{\infty a}$ gültigen Fundamentalsystems schreiten nunmehr nach fallenden Potenzen von $x - a$ fort.

Um aber die Form des innerhalb $U_{\infty a}$ gültigen Fundamentalsystems zu ermitteln, brauchen wir die Fundamentalgleichung, welche zu einem Umlauf innerhalb $U_{\infty a}$, etwa auf einem dem Begrenzungskreis von $U_{\infty a}$ concentrischen Kreise gehört. Dieser Umlauf schliesst also die sämtlichen endlichen singulären Punkte ein, welches auch der Mittelpunkt $a$ des jeweils betrachteten Gebietes $U_{\infty a}$ ist, und ergiebt daher jedesmal dieselben Linear- und Elementarteiler der Fundamentalgleichung (s. Kap. XI). Die letztere können wir daher füglich *die zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung* nennen. Durch sie ist aber die Einteilung des entsprechenden Fundamentalsystems in Gruppen und Untergruppen bestimmt, sodass wir den Satz aussprechen können:

*Je nach der Wahl des als Mittelpunkt für die Umgebung von $x = \infty$ dienenden endlichen Punktes $x = a$ bildet diese Umgebung ein anderes Gebiet und hat das zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalsystem eine andere Form. Unabhängig aber von jener Wahl ist die zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung und damit die Einteilung aller jener Fundamentalsysteme in Gruppen und Untergruppen.*

**100. Kriterien für die Natur der Stelle $x = \infty$.** Wenn $z = 0$ nicht wesentlich singuläre Stelle von (5) ist, werden wir sagen müssen, $x = \infty$ sei nicht wesentlich singuläre Stelle von (1). Nach (5) ist

aber $z = 0$ dann und nur dann nicht wesentlich singuläre Stelle der transformierten Gleichung, wenn die Entwicklungen von

$$p_1\left(\frac{1}{z}\right), \quad p_2\left(\frac{1}{z}\right), \ldots, p_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

in der Umgebung von $z = 0$ nicht unendlich viele negative Potenzen von $z$ ergeben. Dies ist offenbar unabhängig davon, ob wir die Transformation (2) oder eine beliebige der Transformationen ($2^a$) benutzen. Also gilt von $x = \infty$:

*$x = \infty$ ist dann und nur dann nicht wesentlich singuläre Stelle der Differentialgleichung* (1), *wenn die Entwicklungen von*

$$p_1(x), \quad p_2(x), \ldots, p_n(x)$$

*nach Potenzen von $x$ in dem Kreisring $U_\infty$ nur eine endliche Anzahl positiver Potenzen von $x$ enthalten, — mit andern Worten — wenn die Coefficienten $p_1\, p_2 \ldots p_n$ für $x = \infty$ höchstens von endlicher Ordnung unendlich werden.*

Wir bemerken schon hier, dass dieser Fall insbesondere dann eintritt, wenn die Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung *rationale* Functionen von $x$ sind. Ist nämlich

$$p_k(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m_1} x^{m_1}}, \quad \text{wo } a_m \neq 0, \ b_{m_1} \neq 0,$$

so ist

$$p_k\left(\frac{1}{z}\right) = z^{m_1 - m} \cdot \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z^{m_1} + b_1 z^{m_1 - 1} + \cdots + b_{m_1}}$$

und der Bruch rechts nach positiven Potenzen von $z$ entwickelbar. Wenn also überhaupt $m_1 - m$ negativ ist, so ist $z^{m_1 - m}$ jedenfalls die niedrigste Potenz in der Entwicklung von $p_k\left(\frac{1}{z}\right)$, d. h. $x^{m - m_1}$ die höchste in der Entwicklung von $p_k(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$.

Aus der Gleichung (5) können wir ferner leicht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ablesen, dass $x = \infty$ in Gleichung (1) eine *Stelle der Bestimmtheit für die Integrale* sei. Wir werden nämlich $x = \infty$ dann eine Stelle der Bestimmtheit für die Integrale nennen, wenn in sämtlichen Reihen der Integrale in der Umgebung von $x = \infty$ nach Absonderung des mehrdeutigen Faktors *höchstens eine endliche Anzahl positiver Potenzen* von $x$ auftritt. Dafür, dass dies der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, dass $z = 0$ in (5) eine Stelle der Bestimmtheit sei. Dies tritt aber wiederum, wie (5) nach Weglassung des Faktors $z^n$ zeigt, dann und nur dann ein, wenn die Entwicklungen von

$$\frac{1}{z}\,p_1\left(\frac{1}{z}\right),\quad \frac{1}{z^2}\,p_2\left(\frac{1}{z}\right),\ldots,\frac{1}{z^n}\,p_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

nach $z$ keine negativen Potenzen von $z$ enthalten, d. h. wenn $p_1\,p_2\,..\,p_n$ für $x=\infty$ bezw. mindestens von der $1^{\text{ten}}$, $2^{\text{ten}}$, ..., $n^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden:

*Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass* $x=\infty$ *Stelle der Bestimmtheit für die Integrale der Differentialgleichung* (1) *sei, bestehen darin, dass für* $x=\infty$

$$p_1(x),\ p_2(x),\ldots,p_n(x)$$

*bezw. mindestens von der ersten, zweiten, u. s. w.,* $n^{\text{ten}}$ *Ordnung verschwinden.*

Dieser Satz zeigt eine bemerkenswerte Verschiedenheit zwischen $x=\infty$ und endlichen Werten von $x$ in Bezug auf die Differentialgleichung. Während ein endlicher Wert von $x$ nur dann eine singuläre Stelle für die *Integrale* bilden konnte, wenn er ein singulärer Punkt der *Differentialgleichung* war, d. h. wenn für ihn mindestens ein Coefficient in der mit dem höchsten Coefficienten 1 genommenen Differentialgleichung unendlich wurde, ist es nach dem obigen Satz möglich, dass $x=\infty$ singuläre Stelle der Integrale ist, ohne singuläre Stelle der Coefficienten zu sein. Es war auch aus diesem Grunde erforderlich, $x=\infty$ als Stelle der Bestimmtheit von den Integralen ausgehend zu definieren, statt, wie bei endlichen Werten, von den Coefficienten der Differentialgleichung, ganz abgesehen davon, dass wir den Begriff einer zu $x=\infty$ gehörigen determinierenden Gleichung, der uns bei endlichen Werten zu der Definition führte, ja noch gar nicht aufgestellt haben.

Endlich kann man noch nach den Bedingungen dafür fragen, dass $x=\infty$ *reguläre Stelle* für die Integrale der Differentialgleichung (1) in dem Sinn sei, dass in der Umgebung von $x=\infty$ das allgemeine Integral von (1) eine gewöhnliche Potenzreihe von $x^{-1}$ ist, bei welcher die Coefficienten von

$$x^0,\ x^{-1},\ldots,x^{-n+1}$$

willkürlich sind. Dazu muss also Gleichung (5) in $z=0$ eine reguläre Stelle haben, d. h. wenn man durch $z^{2n}$ dividiert, dürfen sämtliche Coefficienten von (5) nur positive Potenzen von $z$ enthalten. Dies giebt gewisse Gleichungen zur Bestimmung der ersten Glieder in den Entwicklungen von $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $p_2\left(\frac{1}{z}\right)$, ..., $p_n\left(\frac{1}{z}\right)$ nach $z$, worauf wir jedoch nicht weiter eingehen wollen.

**101. Recursionsformel bei $x = \infty$.** Wenn $x = \infty$ auss
lich singuläre Stelle ist, kann es bei $x = \infty$ sich bestimm
tende Integrale geben, die wir mit Hilfe einer Recursi
berechnen können. Wir könnten uns zu dem Ende wied
berufen, dass dies für $x = \frac{1}{z}$ sich bei $z = 0$ bestimmt v
Integrale von (5) sein müssen, deren Berechnung nach I
bekannt ist. Wir ziehen es jedoch vor, den Umweg über
(5) zu vermeiden, um Formeln zu erhalten, die sich unmitt
die Gleichung (1) selbst anwenden lassen, zumal da wir diese
nahezu unverändert aus den entsprechenden in Artikel 6, 7,
ablesen können.

Zu dem Ende setzen wir die Differentialgleichung (1) in

$$(8) \qquad P(x, y) \;\; x^n \sum_\lambda \pi_{0\lambda} x^\lambda y^{(n)} + x^{n-1} \sum_\lambda \pi_{1\lambda} x^\lambda y^{(n-1)} + \cdots + \sum_\lambda \pi_{n\lambda} x^\lambda y$$

$$(\lambda = 0, -1, -2, \ldots),$$

wo die Coefficienten in bei $x = \infty$ gültige Reihen entwi
und mindestens eine der Grössen

$$\pi_{00}, \; \pi_{10}, \ldots, \pi_{n0}$$

von Null verschieden ist. Diese Gestalt (8) der Differential
wollen wir ihre *Normalform bei* $x = \infty$ nennen. Sie unt
sich von der bei $x = 0$ gültigen Normalform nur dadurch,
den Grössen

$$x^n y^{(n)}, \quad x^{n-1} y^{(n-1)}, \ldots, y$$

hier gewöhnliche Potenzreihen von $\frac{1}{x}$, dort aber solche v
tipliciert sind. Dann substituieren wir in (8)

$$(9) \qquad \eta = \sum_s c_s x^s \quad (s = \alpha, \alpha - 1, \alpha - 2, \ldots)$$

und suchen die Bestimmungsgleichungen für die $c$, damit
(9) erfüllt wird. Wie in Artikel 6 folgt dann

$$(10) \qquad P(x, \eta) = \sum_\nu \sum_\lambda \sum_s \pi_{\nu\lambda} s(s-1) \cdots (s - n + \nu + 1)$$

$$\begin{pmatrix} s = \alpha, \alpha - 1, \alpha - 2, \ldots \\ \lambda = 0, -1, -2, \ldots \\ \nu = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix},$$

$$s + \lambda = k$$

setzt,

$$(10^a) \qquad P(x, \eta) = \sum_{\nu}\sum_{s}\sum_{k} \pi_{\nu,\, k-s}\, s(s-1)\cdots(s-n+\nu+1) c_s x^k$$

$$\begin{pmatrix} k = \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \ldots \\ s = \alpha, \alpha-1, \ldots, k \\ \nu = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

oder endlich, wenn

$$(11) \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \pi_{\nu,\, k-s}\, s(s-1)\cdots(s-n+\nu+1) = a_{ks}$$

und

$$(12) \qquad a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\,\alpha-1} c_{\alpha-1} + \cdots + a_{kk} c_k = F_{k\alpha}$$

gesetzt wird,

$$(10^b) \qquad P(x, \eta) = \sum_{(k)} F_{k\alpha} x^k \quad (k = \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \ldots).$$

Die Recursionsformel für die Coefficienten der Reihe (9), d. h. *die zu $x = \infty$ gehörige Recursionsformel der Differentialgleichung* (8) lautet daher

$$(13) \qquad F_{k\alpha} = a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k,\,\alpha-1} c_{\alpha-1} + \cdots + a_{kk} c_k = 0,$$

*wo die $a_{ks}$ durch* (11) *bestimmt sind.*

**102. Die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung.** Wie in Artikel 7 erschliessen wir nunmehr auch hier, dass der Anfangsexponent $\alpha$ der nach fallenden Potenzen von $x$ geordneten Reihe $\eta$ der Gleichung

$$a_{kk} = 0$$

genügen muss. Diese Gleichung lautet ausführlich geschrieben

$$(14) \qquad a_{kk} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \pi_{\nu 0}\, k(k-1)\cdots(k-n+\nu+1) = 0.$$

Weil Gleichung (14) die Anfangsexponenten der in der Umgebung von $x = \infty$ gültigen, nach fallenden Potenzen von $x$ fortschreitenden Reihen bestimmt, wollen wir sie *die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung*, $a_{kk}$ selbst *die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function* nennen. Da nun eine mit $x^\alpha$ beginnende Reihe (9) einer nach steigenden Potenzen von $z$ geordneten, mit $\left(\frac{1}{z}\right)^\alpha = z^{-\alpha}$ beginnenden Reihe entspricht, die der transformierten Gleichung (5) genügt, so erkennen wir, dass die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinie-

renden Gleichung von (8) oder (1) die *entgegengesetzten Werte* der Wurzeln der zu $z = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung von (5) sind, was sich leicht auch direkt durch Aufstellung der letzteren verificieren lässt[1]).

Wie in Artikel 8 fragen wir nun insbesondere, unter welchen Bedingungen die determinierende Function vom Grade $n$ ist. Hierfür ist nach (14) notwendig und hinreichend, dass

$$\pi_{00} \neq 0$$

ist. Wenn diese Bedingung aber erfüllt ist, so verschwinden nach Division durch den Coefficienten von $y^{(n)}$ in Gleichung (8) die Coefficienten von $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y$ für $x = \infty$ bezw. mindestens von der ersten, zweiten, ..., $n^{\text{ten}}$ Ordnung, und hieraus folgt nach Art. 100, dass $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Integrale ist. Somit haben wir gezeigt:

*Dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung bei $x = \infty$ sich in die Form bringen lässt*

$$(15) \qquad x^n \mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right) y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) y = 0,$$

*wo $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind und $\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x = \infty$ nicht verschwindet, verhalten sich alle Integrale der Differentialgleichung bei $x = \infty$ bestimmt.*

Alles Weitere — die Verwertung der Recursionsformel, die Convergenzfrage, die Berechnung der logarithmenbehafteten Integrale, den Fall, dass der Grad der determinierenden Function zwischen 0 und $n$ liegt, — brauchen wir nun nicht mehr zu verfolgen, da sich alle Formeln jetzt unmittelbar aus den schon aufgestellten wie bei einer endlichen Stelle ablesen lassen, für alle theoretischen Erörterungen aber immer die Gleichung (5) zur Seite steht.

1) Es muss bemerkt werden, dass wir mit der obigen Definition der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung von der sonst allgemein üblichen abweichen. Fuchs und mit ihm — soweit die Kenntnis des Verf. reicht — alle anderen Schriftsteller verstehen unter der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung die zu $z = 0$ gehörige der transformierten Gleichung. (Vergl. z. B. Crelles Journ. Bd. 76. (1873) S. 181, 182). Unsere obige Entwicklung dürfte indessen den Vorschlag rechtfertigen, die hier gegebene Definition anzunehmen, weil doch die transformierte Gleichung nur als ein vorübergehendes Hilfsmittel gelten kann, die vorgelegte Gleichung selbst aber bei Verfolgung der Analogie mit den endlichen Stellen unmittelbar zu der von uns gegebenen Definition führt. Die Annahme der letzteren würde überdies manchen Formeln noch zur Vereinfachung dienen. (Vergl. z. B. Art. 105, 106). Erheblich ist ja der Unterschied zwischen beiden Definitionen nicht, da, wie oben gezeigt wird, die Wurzeln der einen Gleichung die entgegengesetzten Werte der andern sind.

**103. Beispiele.** *1. Beispiel:*

$$y' - e^x y = 0. \tag{16}$$

Da

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

eine beständig convergente Potenzreihe ist, d. h. für die ganze $x$-Ebene Gültigkeit hat, fällt hier die Umgebung von $x = 0$ mit der von $x = \infty$ zusammen. Da aber diese Entwicklung unendlich viele positive Potenzen enthält, ist $x = \infty$ hier *wesentlich singuläre Stelle.*

*2. Beispiel:*

$$y' - e^{\frac{1}{x}} y = 0. \tag{17}$$

Die Entwicklung

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!\,x} + \frac{1}{2!\,x^2} + \frac{1}{3!\,x^3} + \cdots$$

ist gültig in der ganzen $x$-Ebene ausserhalb eines mit beliebig kleinem Radius um $x = 0$ geschlagenen Kreises. Dieser Bereich ist also wieder gleichzeitig die Umgebung von $x = 0$ und $x = \infty$, was in beiden Fällen daher rührt, dass zwischen 0 und $\infty$ kein singulärer Punkt liegt. Da aber die letztere Entwicklung gar keine positiven Potenzen von $x$ enthält, ist $x = \infty$ ausserwesentlich singuläre Stelle für (17). $x = \infty$ ist aber nicht Stelle der Bestimmtheit, weil der Coefficient von $y'$ den Wert 1 hat und der von $y$ für $x = \infty$ nicht verschwindet. In der That ist die determinierende Function eine Constante $= -1$.

*3. Beispiel: Die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{18}$$

hat offenbar $x = \infty$ wieder als ausserwesentlich singuläre Stelle, aber im allgemeinen *nicht* als Stelle der Bestimmtheit, es sei denn, dass

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

wäre. Dann reduciert sich die Differentialgleichung auf

$$y^{(n)} = 0$$

und hat in der That die Integrale

$$1,\ x,\ x^2, \ldots, x^{n-1},$$

die sich bei $x = \infty$ bestimmt verhalten. Ist $a_{n-\lambda}$ das letzte in der Reihenfolge $a_1\, a_2 \ldots a_n$ nicht verschwindende $a$, so lautet die Differentialgleichung, in der Normalform bei $x = \infty$ geschrieben,

$$x^n \cdot x^{-n+\lambda} y^{(n)} + x^{n-1} \cdot x^{-n+\lambda+1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x^{\lambda} a_{n-\lambda} y^{(\lambda)} = 0.$$

Sie hat daher unter anderen die Integrale

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{\lambda-1},$$

und ihre determinierende Gleichung bei $x = \infty$ ist

$$a_{n-\lambda}k(k-1)\ldots(k-\lambda+1) = 0$$

mit den Wurzeln $0, 1, \ldots, \lambda - 1$. Die Zahl der obigen bei $x = \infty$ sich bestimmt verhaltenden, linear unabhängigen Integrale ist also gleich dem Grad der determinierenden Function, und folglich hat die Gleichung — um dies beiläufig zu bemerken — nach Artikel 91 keine anderen, von jenen linear unabhängige, bei $x = \infty$ sich bestimmt verhaltende Integrale.

*4. Beispiel:* Bei der Differentialgleichung

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{19}$$

wo die $a$ Constanten sind, ist wieder die Umgebung von $x = 0$ zugleich die von $x = \infty$. Da man aber die $a$ sowohl als Anfangsglieder von gewöhnlichen Potenzreihen von $x$ als auch von solchen von $\frac{1}{x}$ ansehen kann, ist nicht nur $x = 0$, sondern nach (15) auch $x = \infty$ Stelle der Bestimmtheit. Diese von uns schon oft als Beispiel benutzte Differentialgleichung ist also dadurch ausgezeichnet, dass sie ausser $x = 0$ höchstens noch $x = \infty$ als singuläre Stelle, beide aber jedenfalls als Stellen der Bestimmtheit hat.

Hat die zu $x = 0$ gehörige determinierende Gleichung die Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

von denen nicht zwei einander gleich sein mögen, so lauten die Integrale

$$x^{\alpha_1},\ x^{\alpha_2},\ \ldots,\ x^{\alpha_n},$$

welche ebenfalls bei $x = 0$ wie bei $x = \infty$ gültig sind; daher muss die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function mit der zu $x = 0$ gehörigen, bis auf einen constanten Faktor höchstens, identisch sein. Bildet man in der That die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function, so lautet dieselbe nach (14)

$$k(k-1)\cdots(k-n+1) + a_1 k(k-1)\cdots(k-n+2) + \cdots + a_n,$$

was nach Art. 10 auch die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function von (19) ist.

Damit nun $x = \infty$ insbesondere *reguläre* Stelle für (19) sei, muss diese die Integrale

$$1,\ x^{-1},\ x^{-2},\ \ldots,\ x^{-n+1},$$

die determinierende Gleichung also die Wurzeln $0, -1, \ldots, -n+1$ haben oder

$$k(k+1)\dots(k+n-1)=0$$

uten; und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, sind die Integrale bei $= \infty$ regulär. Bestimmt man demgemäss die Werte der $a$, so ergiebt sich (am einfachsten unter Benutzung von (5))

$$a_\lambda = \lambda! \binom{n}{\lambda}\binom{n-1}{\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

sodass $a_n = 0$ ist.

*Die Differentialgleichung*

$$x^n y^{(n)} + 1!\binom{n}{1}\binom{n-1}{1} x^{n-1} y^{(n-1)}$$

$$+ 2!\binom{n}{2}\binom{n-1}{2} x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + (n-1)!\binom{n}{n-1}\binom{n-1}{n-1} xy' = 0$$

*hat also $x = \infty$ als reguläre Stelle.*

## Kapitel XV.

### Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.

**104. Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.** Mit dem vorigen Kapitel haben wir zwar die in der Einleitung gestellte Aufgabe — Nachweis der Existenz von Integralen und Untersuchung des Verhaltens derselben in der Umgebung der einzelnen Werte von $x$ — insoweit erledigt, wie es sich diese Einführung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen zum Ziel setzen wollte. Hierbei ist aber von Anfang an ein so scharfer Unterschied zwischen den Stellen der Bestimmtheit und denen der Unbestimmtheit hervorgetreten, dass derselbe geradezu dazu herausfordert, denjenigen *Differentialgleichungen, welche nur Stellen der Bestimmtheit besitzen*, noch eine besondere Betrachtung zu widmen, die den Gegenstand dieses letzten Kapitels bilden soll.

Dies rechtfertigt sich auch noch aus zwei weiteren Gründen, einem historischen und einem praktischen. Die gedachten Differentialgleichungen waren die ersten, die in den grundlegenden Untersuchungen von Fuchs[1]) besonders charakterisiert wurden und eine eingehende Behandlung erfuhren. Wir wollen deshalb solche lineare homogene Differentialgleichungen, welche mit Einschluss von $x = \infty$ nur Stellen der Bestimmtheit besitzen, als *Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse* bezeichnen. Gerade an diese Klasse knüpfen aber auch die meisten Specialuntersuchungen und Anwendungen an, zu welchen die Theorie der linearen Differentialgleichungen seitdem geführt hat, sodass es für das weitere Studium dieser Theorie von Wert ist, mit dieser besonderen Klasse von Differentialgleichungen bekannt zu sein.

Weil aber Stellen der Bestimmtheit ausserwesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung sind, ziehen wir die Schranken zunächst etwas weiter und fragen nach der Gestalt solcher *Differentialgleichungen, welche mit Einschluss von $x = \infty$ nur ausserwesentlich sin-*

1) Crelles Journ. Bd. 66. (1866) und 68. (1868).

*guläre Stellen haben.* Es sollen also die eindeutigen Coefficienten der Differentialgleichung

$$(1)\qquad P(x, y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

für jeden endlichen Wert, für den sie überhaupt unendlich werden, und ebenso für $x = \infty$ (s. Art. 100) nur von endlicher Ordnung unendlich werden. Eindeutige Functionen aber, welche im Endlichen und Unendlichen nur ausserwesentlich singulär werden, sind nach einem Satze der Functionentheorie[1]) rationale Functionen. Wir haben also zunächst das Resultat:

*Eine Differentialgleichung, welche im Endlichen und Unendlichen nur ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt, hat rationale Coefficienten.*

**105. Gemeinschaftliche Recursionsformel bei $x=0$ und $x=\infty$ für Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.** Bevor wir nun zu den Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse übergehen, wollen wir eine bemerkenswerte Eigenschaft hervorheben, die allen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zukommt.

Um bei einer solchen die zu $x = 0$ gehörige Recursionsformel zu bilden, können wir die Differentialgleichung in die Form

$$(2)\qquad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

setzen, wo $p_0\, p_1 \ldots p_n$ *ganze* rationale Functionen von $x$ ohne gemeinsamen Teiler sind. Da sich also der Gültigkeitsbereich dieser Functionen $p_0 \ldots p_n$ über die ganze $x$-Ebene erstreckt, können wir eben diese Gestalt (2) der Differentialgleichung auch zur Bildung der zu $x = \infty$ gehörigen Recursionsformel benutzen. Um für die Bildung der ersteren Recursionsformel die Formeln des Artikels 6 anwenden zu können, setzen wir die Differentialgleichung in die Normalform

$$(3)\qquad x^n g_0 y^{(n)} + x^{n-1} g_1 y^{(n-1)} + \cdots + g_n y = 0,$$

wobei die $g$ wieder ganze Functionen sind und mindestens eine von ihnen für $x = 0$ nicht verschwindet. Da die $g$ also nicht mehr wie die Coefficienten der im Artikel 6 zu Grunde gelegten Gleichung (3) (Art. 5) unendliche Reihen sind, wird auch die hier entstehende Recursionsformel nicht eine mit $k$ beständig wachsende Gliederzahl enthalten, sondern in Bezug auf diese constant bleiben, sobald $k$ um eine gewisse Zahl grösser als $\alpha$ ist. Diese constante Gliederzahl ist leicht zu ermitteln.

1) Vergl. z. B. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques. 2me éd., Paris 1875. S. 206.

Es sei $\lambda_0\, \lambda_1 \dots \lambda_n$ bezw. der Grad von $g_0\, g_1 \dots g_n$, und $\lambda$ die grösste der Zahlen $\lambda_0\, \lambda_1 \dots \lambda_n$. Dann sind in Formel (7) (Art. 6) sämtliche $\mathfrak{p}_{\nu,\, k-s} = 0$, bei denen $k - s > \lambda$, während mindestens eine der Grössen $\mathfrak{p}_{\nu\lambda} \neq 0$ ist; es ist folglich

$$a_{ks} = 0 \quad \text{für} \quad s < k - \lambda,$$

während $a_{k,\, k-\lambda} \neq 0$ ist. Die Recursionsformel (8) (Art. 6) enthält also nur die Glieder mit

$$c_k,\ c_{k-1},\ \dots,\ c_{k-\lambda},$$

d. h. wenn wir

(4) $$\lambda + 1 = m$$

setzen, $m$ Glieder und lautet demnach

(5) $$F_{k\alpha} = a_{kk}\, c_k + a_{k,\, k-1} c_{k-1} + \dots + a_{k,\, k-m+1} c_{k-m+1} = 0, \qquad (k = \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots)$$

wo die $a_{ks}$ die durch (7) Art. 6 bestimmten ganzen Functionen von $k$ sind. Dieser Formel müssen also je $m$ auf einander folgende Coefficienten $c_k, c_{k-1}, \dots, c_{k-m+1}$, die mit den Potenzen $x^k, x^{k-1}, \dots, x^{k-m+1}$ in irgend einer die Differentialgleichung (2) bezw. (3) befriedigenden Reihe

$$\sum_{(\nu)} c_\nu x^\nu$$

multipliciert sind, genügen. Da nun aber zur Bildung des Ausdrucks $F_{k\alpha}$ in (5) nur das *endliche* Stück

$$c_{k-m+1} x^{k-m+1} + \dots + c_{k-1} x^{k-1} + c_k x^k$$

jener Reihe beiträgt, so ist es offenbar ganz gleichgültig, ob die Reihe selbst als eine unendliche angesetzt ist, ob sie in Richtung der wachsenden oder der abnehmenden Exponenten, oder selbst nach beiden Richtungen[1]) in's Unendliche läuft. Wir können daher (5) gleichzeitig als zu $x = \infty$ gehörige Recursionsformel auffassen und benutzen; der einzige Unterschied ist der, dass man, wenn es sich um eine Reihe mit steigenden Potenzen von $x$ handelt, vermöge der Formel (5)

$$c_k \text{ durch } c_{k-1},\ c_{k-2},\ \dots,$$

andernfalls dagegen

$$c_{k-m+1} \text{ durch } c_{k-m+2},\ c_{k-m+3},\ \dots$$

ausdrückt.

1) In diesem Falle würden wir allerdings die Recursionsformel zur wirklichen Berechnung der Reihe mit elementaren Hülfsmitteln nicht benutzen können. Vergl. hierzu von Koch, Acta Math. Bd. 15. (1891), Bd. 16. (1892).

Vergleicht man nun (5) mit der in Artikel 101 aufgestellten, zu $x = \infty$ gehörigen Recursionsformel (13), so war dort $c_k$ das mit dem *niedrigsten* Index versehene $c$, welches in der Formel auftritt. Um in dieser Beziehung unsere jetzige Formel mit der dortigen noch in Übereinstimmung zu bringen, brauchen wir nur

$$k \text{ durch } k + m - 1$$

zu ersetzen, und erhalten so

$$(6) \qquad a_{k+m-1,\, k+m-1} c_{k+m-1} + \cdots + a_{k+m-1,\, k} c_k = 0$$

als zu $x = \infty$ gehörige Recursionsformel. Bei dieser Schreibart ist aber der Coefficient von $c_k$

$$(7) \qquad a_{k+m-1,\, k} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{g_\nu^{(m-1)}(0)}{\overline{m-1}!} k(k-1)\ldots(k-n+\nu+1)$$

die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function.

Wir haben also zunächst das Ergebnis:

*Bei Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten folgen die nach aufsteigenden und die nach absteigenden Potenzen von $x$ fortschreitenden Reihen ein und derselben, bezw. nur in umgekehrter Richtung zu lesenden Recursionsformel. Der Coefficient von $c_k$ ist dabei die zu $x = 0$ oder zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function, je nachdem $c_k$ das $c$ mit höchstem oder niedrigstem Index in der Formel ist*[1]).

**106. Gemeinschaftlicher Algorithmus der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten bei $x = 0$ und $x = \infty$.** Aus dem vorstehenden Satz wollen wir noch eine Folgerung in Bezug auf die Integrale selbst ziehen, für den Fall wenigstens, dass sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende Integrale, also auch solche von der ersten Stufe existieren.

Zu dem Ende führen wir die Grössen

$$\alpha_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m;\ \nu = 1, 2, \ldots n)$$

und $m$ Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ durch die Identitäten

$$(8) \qquad \begin{cases} a_{kk} = a_1 (k - \alpha_{11}) \;.\;.\;.\;.\; (k - \alpha_{1n}) \\ a_{k,\,k-1} = a_2 (k - 1 - \alpha_{21}) \;.\;.\;.\;.\; (k - 1 - \alpha_{2n}) \\ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ a_{k,\,k-m+1} = a_m (k - m + 1 - \alpha_{m1}) \ldots (k - m + 1 - \alpha_{mn}) \end{cases}$$

ein, wobei zu bemerken ist, dass wenn $a_{ks}$ niedrigeren als $n^{\text{ten}}$ Grades ist, die entsprechende Identität (8) weniger als $n$ Grössen $\alpha$ definiert. Hiernach sind

1) Vergl. Crelles Journ. Bd. 106. (1890). S. 269 ff.

$$\alpha_{11}\ \alpha_{12}\ldots\alpha_{1n}$$

die Wurzeln der zu $x=0$, und

$$\alpha_{m1}\ \alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn}$$

die Wurzeln der zu $x=\infty$ gehörigen determinierenden Gleichung[1]) und Formel (5) erhält die Gestalt

$$(5^a)\qquad \begin{aligned} &a_1(k-\alpha_{11})(k-\alpha_{12})\ \ldots\ldots\ (k-\alpha_{1n})c_k\\ +&\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +&\ a_m(k-m+1-\alpha_{m1})\ldots(k-m+1-\alpha_{mn})c_{k-m+1}=0.\end{aligned}$$

Ist nun $\alpha_{1i}$ eine solche der Wurzeln $\alpha_{11}\ldots\alpha_{1n}$, zu der ein Integral $y_{0i}$ erster Stufe gehört, so wird dieses aus ($5^a$) berechnet, indem man für $k$ die Werte $\alpha_{1i}$, $\alpha_{1i}+1,\ldots$ einsetzt. Demnach hängen die einzelnen Coefficienten (s. Art. 11) und folglich die ganze Reihe $y_{0i}$ *in bestimmter Weise* von den Grössen $a_1\ldots a_m$ und den Differenzen $\alpha_{1i}-\alpha_{\mu\nu}$ ab. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, $\alpha_{1i}$ sei die grösste Wurzel in seiner Gruppe, denken uns den willkürlichen Anfangscoefficienten $=1$ gesetzt und drücken dann jene Eigenschaft durch die Bezeichnung aus

$$(9)\qquad y_{0i}=x^{\alpha_{1i}}\Phi\left(a_1\ldots a_m;\ \left\{\begin{matrix}\alpha_{1i}-\alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{1i}-\alpha_{1n}\\ \cdot & \ldots & \cdot\\ \alpha_{1i}-\alpha_{m1}, & \ldots, & \alpha_{1i}-\alpha_{mn}\end{matrix}\right\};\ x\right),$$

wo $\Phi$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x$ ist, deren Coefficienten in bestimmter Weise aus den $a$ und den Differenzen der $\alpha$ gebildet sind. Ist also $\alpha_{1k}$ eine andere Wurzel der zu $x=0$ gehörigen determinierenden Gleichung, bei der dieselben Voraussetzungen zutreffen, so wird die zu $\alpha_{1k}$ gehörige Integralreihe durch denselben Reihenalgorithmus $\Phi$ geliefert, in welchem nur der Parameter $\alpha_{1i}$ durch $\alpha_{1k}$ ersetzt ist.

Eben dieser Reihenalgorithmus liefert aber auch die nach fallenden Potenzen von $x$ fortschreitenden, zu $x=\infty$ gehörigen Integralreihen. Die zu $x=\infty$ gehörige Recursionsformel (6) lautet nämlich unter Benutzung der Parameter $\alpha_{\mu\nu}$

$$(6^a)\qquad \begin{aligned} &a_m(k-\alpha_{m1})(k-\alpha_{m2})\ \ldots\ldots\ (k-\alpha_{mn})c_k\\ +&\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +&\ a_1(k+m-1-\alpha_{11})\ldots(k+m-1-\alpha_{1n})c_{k+m-1}=0\end{aligned}$$

oder, wenn man noch mit $(-1)^n$ multipliciert,

---

1) Vergl. Art. 102, insbesondere die Anmerkung S. 208.

$$(6^b)\qquad \begin{aligned} &a_m(\alpha_{m1}-k)(\alpha_{m2}-k)\quad \ldots\ldots\quad (\alpha_{mn}-k)c_k \\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+a_1(\alpha_{11}-k-m+1)\ldots(\alpha_{1n}-k-m+1)c_{k+m-1}=0. \end{aligned}$$

Ist nun $\alpha_{mi}$ wieder eine Wurzel der zu $x=\infty$ gehörigen determinierenden Gleichung, welche die kleinste in ihrer Gruppe sein möge und zu der ein sich bei $x=\infty$ bestimmt verhaltendes Integral $y_{\infty i}$ wirklich gehört, so wird dieses berechnet, indem man in $(6^b)$ für $k$ die Werte $\alpha_{mi}$, $\alpha_{mi}-1$, $\alpha_{mi}-2,\ldots$ einsetzt. Vergleicht man aber dann die Formeln $(5^a)$ und $(6^b)$ miteinander, so zeigt sich, dass nach der letzteren

$$c_k \text{ aus } c_{k+1},\ c_{k+2},\ldots,\ c_{k+m-1}$$

geradeso berechnet wird, wie nach der ersteren

$$c_k \text{ aus } c_{k-1},\ c_{k-2},\ldots,\ c_{k-m+1},$$

falls man $a_1\ a_2\ldots a_m$ bezw. durch $a_m\ a_{m-1}\ldots a_1$ und die Differenzen $\alpha_{1i}-\alpha_{\mu\nu}$ durch die Differenzen $\alpha_{m-\mu+1,\nu}-\alpha_{mi}$ ersetzt. Demnach wird das Integral $y_{\infty i}$ auch durch den Algorithmus $\Phi$ gegeben; es ist

$$(10)\qquad y_{\infty i}=x^{\alpha_{mi}}\,\Phi\left(a_m\ldots a_1;\ \begin{Bmatrix}\alpha_{m1}-\alpha_{mi},\ldots,\alpha_{mn}-\alpha_{mi}\\ \cdot\qquad \cdot\quad \ldots,\ \cdot\qquad \cdot\\ \alpha_{11}-\alpha_{mi},\ldots,\alpha_{1n}-\alpha_{mi}\end{Bmatrix};\ x^{-1}\right).$$

Wir dürfen also sagen:

*Bei einer Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten werden die bei $x=0$ und die bei $x=\infty$ sich bestimmt verhaltenden Integrale erster Stufe durch ein und denselben Algorithmus geliefert, in welchem nur die Parameter sich in bestimmter Weise ändern*[1]).

**107. Anwendung auf die Gauss'sche Differentialgleichung.** Wir wollen die Ergebnisse der beiden letzten Artikel sogleich an dem Beispiel der Gauss'schen Differentialgleichung

$$(11)\qquad x(x-1)y''-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'+\alpha\beta y=0$$

1) Vergl. Crelles Journ. Bd. 109. (1892). S. 222—224. — Die in dem obigen Satz ausgedrückte Eigenschaft der Integrale trat zuerst bei der Gauss'schen Differentialgleichung hervor (s. folgenden Art.), dann bei allen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse (vgl. Seifert, In.-Diss., Göttingen, 1875 und des Verf. In.-Diss., Berlin, 1886), endlich bei den Differentialgleichungen mit zweigliedriger Recursionsformel (vgl. Pochhammer, Crelles Journ. Bd. 102 (1888), Bd. 108 (1891) und andere Aufsätze desselben Autors). — Bezüglich der Einführung der Parameter $\alpha_{\mu\nu}$ vergl. auch Schafheitlin, In.-Diss., Halle, 1885, und Crelles Journ. Bd. 106 (1890).

veranschaulichen, in welcher $\gamma$ nicht gleich Null oder ganzzahlig, $\alpha$ und $\beta$ nicht um eine ganze Zahl verschieden oder gleich seien.

Die zu $x = 0$ gehörige Recursionsformel lautet (s. Art. 10)

$$(12) \qquad k(k+\gamma-1)c_k - (k+\alpha-1)(k+\beta-1)c_{k-1} = 0,$$

welche gleichzeitig als zu $x = \infty$ gehörige Recursionsformel
Um sie als solche zu benutzen, schreiben wir statt (12)

$$(12^a) \qquad (k+1)(k+\gamma)c_{k+1} - (k+\alpha)(k+\beta)c_k = 0.$$

Die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung ist also zw
Grades

$$(k+\alpha)(k+\beta) = 0$$

mit den Wurzeln $-\alpha$, $-\beta$; $x = \infty$ ist also Stelle der Bestimm
und die zugehörigen Integrale sind beide erster Stufe, da $-\alpha$,
nach Voraussetzung keine Gruppe bilden. Das Gleiche gilt von
zu $x = 0$ gehörigen Integralen, da auch $0$ und $1-\gamma$ nicht um
ganze Zahl oder Null verschieden sind.

Verglichen mit den Bezeichnungen des vorigen Artikels ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1, & \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_{11} &= 0, & \alpha_{12} &= 1-\gamma \\ \alpha_{21} &= -\alpha, & \alpha_{22} &= -\beta. \end{aligned}$$

Die $\alpha$ brauchen also in das Symbol $\Phi$ für die Integralreihe hier
nicht aufgenommen zu werden, da durch die Vertauschung ders
nur die Recursionsformel mit $-1$ multipliciert, die Reihe also
nicht geändert wird. Weiter bemerkt man, dass schon in der a
meinen Reihe $\Phi$ des vorigen Artikels die in derselben Zeile stehe
Differenzen der $\alpha$ beliebig unter einander vertauscht werden dü
weil dadurch nur die Faktoren von Produkten unter einander vertau
werden. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes hat man hier

$$(13) \qquad \begin{cases} y_{00} = \Phi\begin{pmatrix} 0, \gamma-1 \\ \alpha, \beta \end{pmatrix}; x \Big) \\ y_{0,1-\gamma} = x^{1-\gamma}\,\Phi\begin{pmatrix} 0, & 1-\gamma \\ \alpha-\gamma+1, & \beta-\gamma+1 \end{pmatrix}; x \Big) \\ y_{\infty,-\alpha} = x^{-\alpha}\,\Phi\begin{pmatrix} 0, \alpha-\beta \\ \alpha, \alpha-\gamma+1 \end{pmatrix}; x^{-1} \Big) \\ y_{\infty,-\beta} = x^{-\beta}\,\Phi\begin{pmatrix} 0, \beta-\alpha \\ \beta, \beta-\gamma+1 \end{pmatrix}; x^{-1} \Big). \end{cases}$$

Für die Reihe $y_{00}$ haben wir aber schon im Artikel 23 die üb
Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ eingeführt; es ist also

$$(14) \qquad \Phi\begin{pmatrix} 0, \gamma-1 \\ \alpha, \beta \end{pmatrix}; x\Big) = F(\alpha, \beta, \gamma; x).$$

und mittelst dieser Identität können wir auch die drei anderen $\Phi$-Reihen von (13) in $F$-Reihen übersetzen. So erhalten wir die Integrale bei $x=0$ und $x=\infty$ in der Gestalt

$$(13^a)\quad \begin{cases} y_{00} = F(\alpha, \beta, \gamma;\, x) \\ y_{0,\,1-\gamma} = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\, \beta+1-\gamma,\, 2-\gamma;\, x) \\ y_{\infty,\,-\alpha} = x^{-\alpha} F(\alpha,\, \alpha-\gamma+1,\, \alpha-\beta+1;\, x^{-1}) \\ y_{\infty,\,-\beta} = x^{-\beta} F(\beta,\, \beta-\gamma+1,\, \beta-\alpha+1;\, x^{-1}), \end{cases}$$

von denen wir das zweite gleichlautend bereits in Art. 23 gefunden haben.

In gleich einfacher Weise gelangt man zu den nach steigenden und nach fallenden Potenzen von $x-1$ fortschreitenden Integralreihen der Gauss'schen Differentialgleichung.

**108. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.** Wenn nun die Differentialgleichung

$$(15)\qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$$

der Fuchs'schen Klasse angehört, so besitzt dieselbe nach Definition mit Einschluss von $x=\infty$ nur Stellen der Bestimmtheit als singuläre Stellen. Die Coefficienten $p$ sind daher rationale Functionen und die Zahl der singulären Stellen ist eine endliche.

Seien

$$a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_\varrho$$

die sämtlichen, im Endlichen gelegenen singulären Stellen von (15), zu denen im allgemeinen noch $x=\infty$ als $(\varrho+1)^{\text{te}}$ singuläre Stelle hinzutritt. Damit nun $a_i$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, ist notwendig und hinreichend (s. Gl. (10') Art. 8), dass $p_\lambda$ für $x=a_i$ höchstens von der $\lambda^{\text{ten}}$ Ordnung,

$$p_\lambda (x-a_i)^\lambda$$

für $x=a_i$ also gar nicht unendlich wird. Setzt man daher

$$(16)\qquad \psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho),$$

so darf

$$p_\lambda\, \psi(x)^\lambda$$

für keinen endlichen Wert von $x$ unendlich werden, und da $p_\lambda$ eine rationale Function ist, so muss jenes Produkt eine *ganze rationale Function* von $x$ sein

$$(17)\qquad p_\lambda\, \psi(x)^\lambda = G_\lambda(x) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Damit nun auch $x=\infty$ eine Stelle der Bestimmtheit sei, ist notwendig und hinreichend (s. Art. 100 und 102), dass $p_\lambda(x)$ für $x=\infty$

mindestens von der $\lambda^{\text{ten}}$ Ordnung verschwindet. Dies tritt aber und nur dann ein, wenn in

$$p_\lambda \equiv \frac{G_\lambda(x)}{\psi(x)^\lambda}$$

der Grad des Zählers $G_\lambda$ mindestens um $\lambda$ Einheiten hinter de Nenners, d. h. $\varrho\lambda$ zurückbleibt. Bezeichnen wir also jetzt mit

$$g_{\lambda(\varrho-1)}(x)$$

eine ganze rationale Function von $x$, deren Grad $\leqq \lambda(\varrho - 1$ muss $p_\lambda$ die Form haben

$$(18) \qquad p_\lambda(x) \equiv \frac{g_{\lambda(\varrho-1)}(x)}{\psi(x)^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir sind also zu dem Ergebnis gelangt:

*Die linearen homogenen Differentialgleichungen der Fuchs Klasse haben die Gestalt*

$$(19) \quad y^{(n)} + \frac{g_{\varrho-1}}{\psi} y^{(n-1)} + \frac{g_{2(\varrho-1)}}{\psi^2} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{g_{n(\varrho-1)}}{\psi^n} y = ($$

wo

$$\psi \equiv (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\varrho),$$

$a_1\, a_2 \ldots a_\varrho$ *die sämtlichen singulären Punkte im Endlichen sind eine ganze rationale Function von* $x$ *bedeutet, deren Grad* $\leqq \lambda$. *gekehrt hat jede Differentialgleichung der Gestalt* (19) *nur Stell Bestimmtheit* [1]).

**109. Beziehung zwischen den Wurzeln der determinier Gleichungen aller singulären Punkte.** Abgesehen von der gemein lichen Recursionsformel und dem daraus entspringenden gemein lichen Algorithmus der Integrale bei $x=0$ und $x=\infty$, die wir sch Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten kennen gelernt können wir für die Differentialgleichungen der Fuchs'schen speziell noch einen weiteren Satz, der sich auf die determinie Gleichungen aller singulären Punkte bezieht, ableiten.

Zu dem Ende zerlegen wir den Coëfficienten

$$p_1 \equiv \frac{g_{\varrho-1}}{\psi}$$

in Partialbrüche

$$(20) \qquad p_1 \equiv \frac{g_{\varrho-1}}{\psi} \equiv \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{\alpha_\varrho}{x - a_\varrho},$$

sodass

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866). S. 146.

$$[p_1(x-a_i)]_{x=a_i} \equiv \alpha_i \quad (i=1, 2, \ldots, \varrho).$$

Daher lauten die beiden ersten Terme der zu $x = a_i$ gehörigen determinierenden Function

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) + \alpha_i r(r-1)\cdots(r-n+2),$$

während alle folgenden niedrigeren als $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in $r$ sind. Der Coefficient von $r^{n-1}$ in der determinierenden Gleichung ist daher

$$\alpha_i - \frac{n(n-1)}{2},$$

während der von $r^n$ gleich 1 ist. Demnach ist

$$\frac{n(n-1)}{2} - \alpha_i \equiv \sum_{k=1}^{k=n} r_{ik},$$

die Summe der Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinierenden Gleichung und

$$(21) \quad \varrho\frac{n(n-1)}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho) \equiv \sum_{i,k} r_{ik} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \varrho \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

die Summe aller Wurzeln der zu den $\varrho$ endlichen singulären Punkten gehörigen determinierenden Gleichungen.

Die beiden ersten Terme der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Function von (19) lauten nun nach Artikel 102 (14)

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) + [xp_1(x)]_{x=\infty}\, r(r-1)\cdots(r-n+2).$$

Da aber nach (20)

$$[xp_1(x)]_{x=\infty} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho$$

ist, so erhalten wir als Summe der $n$ Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung

$$(22) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} r_{\infty k} \equiv \frac{n(n-1)}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho).$$

Aus (21) und (22) folgt also

$$\sum_{i,k} r_{ik} - \sum_k r_{\infty k} \equiv (\varrho - 1)\frac{n(n-1)}{2},$$

d. h. *die Differenz zwischen der Summe der $\varrho n$ Wurzeln der zu den endlichen singulären Stellen gehörigen determinierenden Gleichungen und*

*der Summe der $n$ Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung hat den nur von $n$ und $\varrho$ abhängigen ganzzahligen Wert*

$$(\varrho - 1)\frac{n(n-1)}{2}\ ^{1)}.$$

**110. Differentialgleichungen, die nur algebraische Integrale besitzen.** Um die Wichtigkeit der Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse in functionentheoretischer Hinsicht noch besonders hervorzuheben, wollen wir zeigen, dass die linearen homogenen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten, *deren sämtliche Integrale algebraische Functionen sind*, in jener Klasse enthalten sind.

Eine algebraische Function $y$ von $x$ besitzt nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen und, wenn $x = 0$ eine solche ist, so ist in der Umgebung von $x = 0$ $y$ in der Form

$$y = \sum_{(k)} c_k x^{\frac{k}{\mu}} \qquad (k = \alpha, \alpha + 1, \ldots) \tag{23}$$

darstellbar, wo $\mu$ eine positive ganze Zahl, $\alpha$ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, während in der Umgebung jeder nicht singulären Stelle die einzelnen Zweige von $y$ als gewöhnliche Potenzreihen darstellbar sind[2]). Genügt nun (23) einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten, so müssen dieser (s. Art. 5) die einzelnen Reihen genügen, in welche man (23) zerlegen kann, sodass jede nur Potenzen von $x$ enthält, deren Exponenten um ganze Zahlen von einander verschieden sind. Diese Reihen

$$y_1 = \sum_{(k)} c_k x^{\frac{k}{\mu}} \qquad (k = \alpha, \alpha + \mu, \alpha + 2\mu, \ldots)$$

$$y_2 = \sum_{(k)} c_k x^{\frac{k}{\mu}} \qquad (k = \alpha + 1, \alpha + 1 + \mu, \alpha + 1 + 2\mu, \ldots)$$

u. s. w.,

wo $y_1 + y_2 + \cdots = y$, verhalten sich aber bei $x = 0$ bestimmt. Analoges gilt von $x = \infty$. Die Integrale der nur algebraisch integrierbaren Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten haben also nur Stellen der Bestimmtheit, d. h.

*Lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten,*

---

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. S. 142. — Die Abweichung des obigen von dem dortigen Satz rührt von der abweichenden Definition der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung her (s. Art. 102).

2) Vergl. z. B. Briot et Bouquet, Th. d. f. ell., 2me éd. S.

*deren sämtliche Integrale algebraische Functionen sind, gehören der Fuchs'schen Klasse an*[1]).

Wir können leicht noch einige weitere Eigenschaften dieser Differentialgleichungen aufstellen:

1) *Keine der zu einem endlichen singulären Punkt oder zu* $x = \infty$ *gehörigen determinierenden Gleichungen darf mehrfache Wurzeln besitzen, und bei jeder Wurzelgruppe müssen die Bedingungen des Kap. II, dass zu jeder Wurzel ein Integral erster Stufe gehört, erfüllt sein;*

2) *die sämtlichen Wurzeln aller determinierenden Gleichungen müssen rationale Zahlen sein.*

Sobald nämlich Logarithmen oder irrationale Anfangspotenzen bei den Integralen aufträten, wären diese ja nicht algebraische Functionen.

Da ferner eine algebraische Function bei beliebigen Umläufen ihrer unabhängigen Variablen nur eine endliche Anzahl von Werten annimmt, so muss die Gruppe der Differentialgleichung, welche nur algebraische Integrale besitzt, eine *endliche* sein (s. Art. 44):

*Lineare homogene Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse, welche nur algebraische Integrale besitzen, haben eine endliche Gruppe.*

Dieser Satz lässt sich aber auch umkehren[2]). Wir setzen also jetzt voraus, die Differentialgleichung

$$(24)\qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

gehöre in die Fuchs'sche Klasse und besitze eine endliche Gruppe. Ist dann

$$y = \eta_1$$

ein beliebiges Integral derselben, so geht dieses bei allen möglichen Umläufen von $x$ nur in eine endliche Anzahl von Zweigen über, die wir durch

$$\eta_1 \; \eta_2 \ldots \eta_m$$

bezeichnen wollen. Die symmetrischen Functionen derselben

$$\begin{aligned} A_1 &= \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m \\ A_2 &= \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \cdots + \eta_{m-1}\eta_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m &= \eta_1\eta_2 \ldots \eta_m \end{aligned}$$

sind daher in der ganzen $x$-Ebene eindeutige Functionen und haben, da $\eta_1 \ldots \eta_m$ sich überall bestimmt verhalten, nur ausserwesentlich

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. S. 158 und Jahresbericht der städt. Gewerbeschule zu Berlin 1865, S. 31 ff.

2) Vergl. Koenigsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig, 1889, S. 478, 479.

singuläre Stellen. Die $A_1\ A_2 \ldots A_m$ sind daher rationale Functionen von $x$[1]). $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ sind aber die Wurzeln der Gleichung

$$\eta^m - A_1\,\eta^{m-1} + \cdots + (-1)^m A_m = 0, \tag{25}$$

deren Coefficienten rationale Functionen von $x$ sind, d. h. $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ *sind algebraische Functionen von* $x$. Hiermit ist die Umkehrung jenes Satzes bewiesen, und wir können nunmehr sagen:

*Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare homogene Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt, bestehen darin, dass dieselbe der Fuchs'schen Klasse angehört und eine endliche Gruppe hat*[2]).

**111. Transformation der Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse**[3]). Die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche der Fuchs'schen Klasse angehört, lautet nach (19)

$$\psi(x)^2 y'' + \psi(x) g_{\varrho-1}(x) y' + g_{2\varrho-2}(x) y = 0, \tag{26}$$

wenn

$$\psi(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho).$$

Die zu $x = a_i$ gehörige determinierende Gleichung ist also

$$r(r-1) + \frac{g_{\varrho-1}(a_i)}{\psi'(a_i)}\,r + \frac{g_{2\varrho-2}(a_i)}{\psi'(a_i)^2} = 0, \tag{27}$$

wo

$$\psi'(a_i) \equiv \left[\frac{d\psi(x)}{dx}\right]_{x=a_i};$$

denn es ist

$$\left[\frac{(x-a_i)\,g_{\varrho-1}(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a_i} \equiv \frac{g_{\varrho-1}(a_i)}{\psi'(a_i)},$$

$$\left[\frac{(x-a_i)^2 g_{2\varrho-2}(x)}{\psi(x)^2}\right]_{x=a_i} \equiv \frac{g_{2\varrho-2}(a_i)}{\psi'(a_i)^2}.$$

Gleichung (27) besitzt also dann und nur dann die Wurzel $r = 0$, wenn $g_{2\varrho-2}(x)$ durch $(x - a_i)$ teilbar ist. Ist aber das Letztere der Fall, so ist $x - a_i$ ein Teiler aller drei Coefficienten von (26) und kann daher fortgelassen werden. Gesetzt, es wäre für jeden Wert von $i$ mindestens eine Wurzel der determinierenden Gleichung Null, so

---

1) Vergl. Art. 104. Schluss.

2) Bezüglich des weiteren Studiums der linearen Differentialgleichungen mit nur algebraischen Integralen vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 81. (1876) S. 97 ff. und Bd. 85. (1878). S. 1 ff.

3) Diese Transformation hat Fuchs in seinen Universitätsvorlesungen angeführt. Vergl. die In.-Diss. des Verf., Berlin, 1886, S. 5 ff.

könnte man also die ganze Gleichung (26) durch $\psi(x)$ dividieren und hätte

$$(26^a)\qquad \psi(x)y'' + g_{\varrho-1}(x)y' + \frac{g_{2\varrho-2}(x)}{\psi(x)}\,y = 0,$$

wo die Coefficienten von $y''$ $y'$ $y$ ganze Functionen von $x$ sind, deren Grad bezw. $=\varrho$, $<\varrho-1$, $<\varrho-2$.

Hat aber nicht jede der Gleichungen (27) $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ mindestens eine Wurzel $= 0$, so können wir doch durch eine einfache Transformation die Gleichung (26) in die Gestalt (26ᵃ) bringen. Bezeichnet man nämlich mit $r_i$ eine Wurzel der Gleichung (27), so setzen wir in (26)

$$(28)\qquad y = (x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\ldots(x-a_\varrho)^{r_\varrho}u \equiv \prod_{i=1}^{i=\varrho}(x-a_i)^{r_i}u,$$

wo also in $\Pi(x-a_i)^{r_i}$ diejenigen Faktoren gar nicht auftreten, bei denen für $r_i$ der Wert Null genommen werden kann. Nach (28) ist

$$y' = \Pi u' + \Pi\sum_{i=1}^{i=\varrho}\frac{r_i}{x-a_i}\,u$$

$$y'' = \Pi u'' + 2\Pi\sum_i\frac{r_i}{x-a_i}\,u'$$
$$+\ \Pi\left(\sum_i\frac{r_i(r_i-1)}{(x-a_i)^2} + \sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\frac{r_ir_k}{(x-a_i)(x-a_k)}\right)u,$$

und die Gleichung für $u$ wird daher nach Division durch $\Pi$

$$(29)\qquad \psi^2 u''$$
$$+\left[2\psi^2\sum_i\frac{r_i}{x-a_i} + \psi g_{\varrho-1}\right]u'$$
$$+\left[\psi^2\left(\sum_i\frac{r_i(r_i-1)}{(x-a_i)^2} + \sum_{i,k}\frac{r_ir_k}{(x-a_i)(x-a_k)}\right)\right.$$
$$\left. + \psi g_{\varrho-1}\sum_i\frac{r_i}{x-a_i} + g_{2\varrho-2}\right]u = 0.$$

Die Coefficienten von $u''$ und $u'$ sind durch $\psi$ teilbar, sodass ganze Functionen $\varrho^{\text{ten}}$, bezw. $<(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades übrig bleiben. Auch der Coefficient von $u$ ist aber durch $\psi$ teilbar, sodass eine ganze Function $<(\varrho-2)^{\text{ten}}$ Grades übrig bleibt. Da nämlich der Gleichung (29) nach (28) die durch $\Pi$ dividierten Integrale von (26) genügen, so hat die zu $x = a_i$ gehörige determinierende Gleichung von (29) für jeden Wert von $i$ $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ die Wurzel Null; folglich ist der Coefficient von $u$ nach der im Anschluss an (26) und (27) gemachten

Bemerkung durch $\psi$ teilbar. Der Quotient ist eine ganze Function von $x$, deren Grad $\leqq \varrho - 2$. Wir können daher sagen:

*Wenn die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse nicht in der Gestalt*

$$\psi(x)y'' + \varphi_{\varrho-1}(x)y' + \varphi_{\varrho-2}(x)y = 0 \tag{30}$$

*vorliegt, so kann sie durch die Transformation* (28) *jedenfalls in dieselbe gebracht werden, wo* $\psi$ *eine ganze Function* $\varrho^{\text{ten}}$ *Grades mit lauter verschiedenen Linearteilern,* $\varphi_{\varrho-1}$ *und* $\varphi_{\varrho-2}$ *ganze Functionen von* $x$ *sind, deren Grade bezw.* $\leqq \varrho - 1$, $\varrho - 2$ *sind.*

Dass diese Transformierbarkeit den Differentialgleichungen zweiter Ordnung *eigentümlich* ist, ergiebt sich daraus, dass die der Gleichung (30) entsprechende Gleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\psi y^{(n)} + \varphi_{\varrho-1}y^{(n-1)} + \varphi_{\varrho-2}y^{(n-2)} + \cdots + \varphi_{\varrho-n}y = 0 \tag{31}$$ [1],

wo die $\varphi$ ganze Functionen höchstens vom Grade ihres Index und, falls dieser negativ, identisch Null sind, bei $x = a_i$ die determinierende Gleichung

$$r(r-1)\,.\,.(r-n+1) + \frac{\varphi_{\varrho-1}(a_i)}{\psi'(a_i)}\, r(r-1)\,.\,.(r-n+2) = 0 \tag{32}$$

mit den Wurzeln

$$0,\ 1, \ldots,\ n-2,\ n-1-\frac{\varphi_{\varrho-1}(a_i)}{\psi'(a_i)}$$

besitzt. Die letztere Eigenschaft ist aber offenbar durch eine Transformation wie (28) nicht zu erreichen, wenn die Wurzeln vorher beliebige Werte hatten.

**112. Die Gauss'sche Differentialgleichung.** Nach dem Ergebnis des vorangehenden Artikels können wir die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit zwei endlichen singulären Punkten in der Form

$$(x-a_1)(x-a_2)y'' + (b_0 + b_1 x)y' + c_0 y = 0 \tag{33}$$

annehmen, wenn wir uns nötigenfalls die Transformation (28) schon ausgeführt denken. Durch eine weitere Transformation der *unabhängigen* Variablen können wir dabei die beiden endlichen singulären Stellen nach den Punkten 0 und 1 verlegen. Wir setzen

$$x - a_1 = (a_2 - a_1)z, \tag{34}$$

sodass

$$x - a_2 = (a_2 - a_1)(z-1),$$

1) Pochhammer bezeichnet die singulären Punkte dieser Differentialgleichung als *einfache*. Vergl. Crelles Journ. Bd. 73 (1871). S. 69.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{a_2 - a_1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{(a_2 - a_1)^2}$$

und die Differentialgleichung (33) in

$$(35) \qquad z(z-1)\frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{b_0 + a_1 b_1}{a_2 - a_1} + b_1 z\right]\frac{dy}{dz} + c_0 y = 0$$

übergeht, oder wenn wir noch

$$(36) \qquad \begin{cases} \dfrac{b_0 + a_1 b_1}{a_1 - a_2} = \gamma \\ b_1 = \alpha + \beta + 1 \\ c_0 = \alpha\beta \end{cases}$$

setzen, in

$$(37) \qquad z(z-1)\frac{d^2y}{dz^2} - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{dy}{dz} + \alpha\beta y = 0,$$

d. h. in die Gauss'sche Differentialgleichung. Wir können daher sagen:

*Die Gauss'sche Differentialgleichung*

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0$$

*repräsentiert die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit zwei endlichen singulären Stellen, insofern als die allgemeinste Gleichung der bezeichneten Art durch die Transformationen* (28), (34), (36) *in jene übergeführt werden kann.*

Diese Bedeutung der Gauss'schen Differentialgleichung möge es rechtfertigen, wenn wir endlich im nächsten Artikel die in Bezug auf dieselbe im Lauf der Untersuchung gewonnenen Resultate noch einmal zusammenstellen und bei jedem der drei singulären Punkte 0, 1, $\infty$ das in seiner Umgebung gültige Fundamentalsystem angeben.

**113. Die Integrale der Gauss'schen Differentialgleichung.** Die Gauss'sche Differentialgleichung

$$(38) \qquad x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0$$

hat die drei singulären Stellen 0, 1, $\infty$, welche sämtlich Stellen der Bestimmtheit sind.

1) *Die singuläre Stelle* $x = 0$. Die Wurzeln der determinierenden Gleichung sind 0, $1 - \gamma$ (s. Art. 10).

a) Sind beide nicht um eine ganze Zahl verschieden oder gehört trotzdem zu beiden ein Integral erster Stufe (s. Art. 18), so lauten diese, ein Fundamentalsystem bildenden Integrale (s. Art. 23)

$$(39^a) \qquad \begin{cases} y_{00} = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ y_{0,1-\gamma} = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x). \end{cases}$$

b) Ist $\gamma$ eine positive ganze Zahl und, falls $\gamma > 1$, keine ( Grössen $\alpha, \beta$ gleich einer der Zahlen $1, 2, \ldots, \gamma - 1$ (s. Art. 18), gehört zu der Wurzel 0 ein Integral erster Stufe

$$y_{00} = F(\alpha, \beta, \gamma; x),$$

zu $1 - \gamma$ aber ein Integral zweiter Stufe

$$y_{0,1-\gamma} = \sum_{(k)} c_k' x^k + F(\alpha, \beta, \gamma; x) \log x.$$
$$(k = 1 - \gamma, 2 - \gamma, \ldots)$$

Zur Berechnung von dessen logarithmenfreiem Teil leiten wir na Art. 59 (indem wir den dort benutzten Buchstaben $\alpha$ durch $a$ ersetze aus

$$F_{ka} = a_{k,k-1} c_{k-1} + a_{kk} c_k$$
$$= -(k + \alpha - 1)(k + \beta - 1) c_{k-1} + k(k + \gamma - 1) c_k = 0$$

(s. Art. 10) die Recursionsformel her

$$\text{(40)} \qquad F_{ka}' = a_{k,k-1}' c_{k-1} + a_{kk}' c_k + a_{k,k-1} c_{k-1}' + a_{kk} c_k'$$
$$= -(2k + \alpha + \beta - 2) c_{k-1} + (2k + \gamma - 1) c_k$$
$$-(k + \alpha - 1)(k + \beta - 1) c_{k-1}' + k(k + \gamma - 1) c_k' = 0,$$

worin die $c$ die Coefficienten von $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ sind, also

$$c_{1-\gamma} = c_{2-\gamma} = \cdots = c_{-1} = 0, \quad c_0 = 1$$

ist. Demnach ergiebt Formel (40), für $k = 2 - \gamma, 3 - \gamma, \ldots, -1$, gebildet,

$$c_{-1}' = \frac{\gamma - 1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}$$

$$c_{-2}' = -\frac{(\gamma - 1)(\gamma - 2) \cdot 1!}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\beta - 1)(\beta - 2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{1-\gamma}' = \frac{(-1)^\gamma (\gamma - 1)!\,(\gamma - 2)!}{(\alpha - 1)\ldots(\alpha - \gamma + 1)(\beta - 1)\ldots(\beta - \gamma + 1)},$$

während wir den willkürlich bleibenden Coefficienten $c_0' = 0$ setze Nach Artikel 63 Formel (26) bilden wir dann

$$C_a(a) = \frac{(-1)^\gamma (\gamma - 1)!\,(\gamma - 2)!}{(\alpha - 1)\ldots(\alpha - \gamma + 1)(\beta - 1)\ldots(\beta - \gamma + 1)} (a - 1 + \gamma)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{a+\gamma-2}(a) = \frac{(\gamma - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} (a - 1 + \gamma)$$

$$C_{a+\gamma-1}(a) = 1$$

und weiter mittelst der Recursionsformel

$$C_k(a)k(k+\gamma-1) = C_{k-1}(a)(k+\alpha-1)(k+\beta-1)$$
$$(k = a+\gamma,\ a+\gamma+1, \ldots)$$

$$C_{a+\gamma}(a) = \frac{(a+\gamma+\alpha-1)(a+\gamma+\beta-1)}{(a+\gamma)(a+2\gamma-1)}$$

$$C_{a+\gamma+1}(a) = \frac{(a+\gamma+\alpha-1)(a+\gamma+\alpha)(a+\gamma+\beta-1)(a+\gamma+\beta)}{(a+\gamma)(a+\gamma+1)(a+2\gamma-1)(a+2\gamma)}$$

u. s. w.

Differenziert man nun alle $C_k(a)$ $(k = a, a+1, \ldots)$ nach $a$ und setzt $a = 1-\gamma$, so findet man für die gesuchte Reihe $\Sigma c_k' x^k$

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^\gamma(\gamma-1)!\,(\gamma-2)!}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-\gamma+1)(\beta-1)\ldots(\beta-\gamma+1)}\, x^{1-\gamma} + \cdots + \dfrac{\gamma-1}{(\alpha-1)(\beta-1)}\, x^{-1} \\ + \dfrac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{\gamma}\right)x \\ + \dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\beta+1}-\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\gamma+1}\right)x^2 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ = F_1(\alpha, \beta, \gamma; x), \end{cases}$$

sodass das hiermit eingeführte Symbol $F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)$ gerade wie $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ einen in ganz bestimmter Weise aus den Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $x$ gebildeten Reihenalgorithmus bedeutet.

Demnach lautet das Fundamentalsystem bei $x = 0$ in dem unter b) betrachteten Falle

$$(39^b)\qquad \begin{cases} y_{00} = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ y_{0,\,1-\gamma} = F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) + F(\alpha, \beta, \gamma; x)\log x\,. \end{cases}$$

Den hierin als besonderen enthaltenen Fall $\gamma = 1$ haben wir bereits in Art. 64 als Beispiel benutzt. In der That wird das allgemeine Integral $c_0' y_{00} + c_0 y_{0,\,1-\gamma}$ für $\gamma = 1$ mit dem dort unter (37) aufgestellten identisch.

c) Wenn endlich $\gamma$ Null oder eine negative ganze Zahl ist, aber keine der Grössen $\alpha$, $\beta$ einen der Werte $0, -1, -2, \ldots, \gamma$ hat, so gehört (s. Art. 18) zu $1-\gamma$ ein Integral erster Stufe, zu der Wurzel 0 aber ein solches zweiter Stufe. Das erstere lautet (s. Art. 23)

$$y_{0,\,1-\gamma} = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x);$$

wir können uns dasselbe auch so berechnet denken, dass wir in (38)

$$(42)\qquad y = x^{1-\gamma} u$$

substituieren und dadurch für $u$ wieder eine Gauss'sche Differentialgleichung erhalten, in welcher an Stelle von $\alpha, \beta, \gamma$ bezw. die Grössen

$$\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma$$

getreten sind. Dann trifft aber bei der jetzigen Annahme über $\gamma$ für die Gauss'sche Differentialgleichung in $u$ der vorher behandelte Fall b) zu. Wir können daher aus ($39^b$) auch das Integral zweiter Stufe für diese Gleichung in $u$ sofort ablesen und erhalten so als Fundamentalsystem der vorgelegten Gleichung (38) in dem Falle c)

$$(39^c)\quad \begin{cases} y_{0,\,1-\gamma} = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x) \\ \quad y_{00} = x^{1-\gamma} F_1(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x) \\ \qquad + x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x) \log x. \end{cases}$$

Hierbei convergieren alle sechs Reihen, die in den Formeln ($39^a$), ($39^b$), ($39^c$) auftreten, innerhalb des Kreises um $x = 0$ mit dem Radius 1.

2) *Die singuläre Stelle* $x = 1$. Die Wurzeln der zugehörigen determinierenden Gleichung sind $0$, $\gamma - \alpha - \beta$ (s. Art. 10). Wir können die Untersuchung am einfachsten auf die vorhergehende bei $x = 0$ zurückführen, indem wir in (38)

$$1 - x = x'$$

substituieren. Dadurch resultiert wieder eine Gauss'sche Differentialgleichung zwischen $y$ und $x'$ (s. Art. 10), in welcher an Stelle von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezw. die Grössen

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta + 1 - \gamma$$

getreten sind. Demnach ergeben sich die folgenden drei Gestalten des zu $x = 1$ gehörigen Fundamentalsystems für die drei Fälle, über deren Eintreten nach Art. 18 zu entscheiden ist, indem man die dortigen Bedingungen für die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ bildet:

a) wenn zu $0$ und $\gamma - \alpha - \beta$ ein Integral erster Stufe gehört (s. auch Art. 23)

$$(43^a)\quad \begin{cases} y_{10} = F(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta + 1 - \gamma;\ 1 - x) \\ y_{1,\,\gamma-\alpha-\beta} = (1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha,\ \gamma - \alpha - \beta + 1;\ 1 - x), \end{cases}$$

b) wenn zu $0$ ein Integral erster, zu $\gamma - \alpha - \beta$ ein solches zweiter Stufe gehört,

$$(43^b)\quad \begin{cases} y_{10} = F(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta + 1 - \gamma;\ 1 - x) \\ y_{1,\,\gamma-\alpha-\beta} = F_1(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta + 1 - \gamma;\ 1 - x) \\ \qquad + F(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta + 1 - \gamma;\ 1 - x) \log(1 - x), \end{cases}$$

c) wenn zu $\gamma - \alpha - \beta$ ein Integral erster, und zu Null ein Integral zweiter Stufe gehört,

$$(43^c)\quad \begin{cases} y_{1,\,\gamma-\alpha-\beta} \equiv (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-x) \\ y_{10} \equiv (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F_1(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-x) \\ \quad + (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-x)\log(1-x), \end{cases}$$

wobei alle sechs in den Formeln ($43^a$), ($43^b$), ($43^c$) auftretenden Reihen innerhalb des Kreises um $x=1$ mit dem Radius 1 convergieren.

3) *Die singuläre Stelle* $x=\infty$. Die Wurzeln der zugehörigen determinierenden Gleichung sind $-\alpha$, $-\beta$ (s. Art. 107). Die Untersuchung wird wieder am einfachsten auf die unter 1) angestellte zurückgeführt, wenn wir in (38) substituieren

$$(44)\qquad x=\frac{1}{z},\quad y=z^{\alpha}u,$$

wodurch zwischen der unabhängigen Variablen $z$ und der abhängigen $u$ eine Gauss'sche Differentialgleichung hervorgeht, in der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezw. durch

$$\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1$$

ersetzt sind. Daher lautet das in der Umgebung von $x=\infty$ gültige Fundamentalsystem

a) wenn zu beiden Wurzeln $-\alpha$, $-\beta$ ein Integral erster Stufe gehört, (s. auch Art. 107)

$$(45^a)\quad \begin{cases} y_{\infty,-\alpha} = x^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{1}{x}\right) \\ y_{\infty,-\beta} = x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{x}\right), \end{cases}$$

b) wenn zu $-\alpha$ ein Integral erster Stufe, zu $-\beta$ ein solches zweiter Stufe gehört,

$$(45^b)\quad \begin{cases} y_{\infty,-\alpha} = x^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{1}{x}\right) \\ y_{\infty,-\beta} = x^{-\alpha} F_1\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{1}{x}\right) \\ \quad + x^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}, \end{cases}$$

c) wenn zu $-\beta$ ein Integral erster, zu $-\alpha$ ein solches zweiter Stufe gehört,

$$(45^c)\quad \begin{cases} y_{\infty,-\beta} = x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{x}\right) \\ y_{\infty,-\alpha} = x^{-\beta} F_1\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{x}\right) \\ \quad + x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}, \end{cases}$$

wo sämtliche sechs in den Formeln ($45^a$), ($45^b$), ($45^c$) auftretenden Reihen *ausserhalb* des Kreises um $x = 0$ mit dem Radius 1 convergieren.

Unsere Methoden haben also gestattet, für die Integrale der Gauss'schen Differentialgleichung bei den singulären Stellen mittelst der beiden Reihenalgorithmen $F$ und $F_1$ in jedem Falle einen expliciten Ausdruck anzugeben.

# Anhang.

## Hülfssätze.

### Zu Kapitel IV.

**Satz 1:** *Sind $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ irgend welche $\lambda$ Functionen der Variablen $x$, so ist die Determinante derselben*

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \ldots & u_1^{(\lambda-1)} \\ u_2 & u_2' & \ldots & u_2^{(\lambda-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ u_\lambda & u_\lambda' & \ldots & u_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix}$$

*dann und nur dann identisch Null, wenn $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ linear abhängig sind*[1]).

*Beweis:* Dass $D$ für jeden Wert von $x$ verschwindet, wenn zwischen $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ eine lineare homogene Relation mit von $x$ unabhängigen Coefficienten besteht, folgt ohne Weiteres aus den Elementen der Determinantentheorie, da alsdann auch zwischen den ersten, zweiten, u. s. w., $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Ableitungen von $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ immer dieselbe Relation besteht.

Zum Beweis der Umkehrung gehen wir von der Annahme aus, dass $D$ identisch Null ist, und bezeichnen die Adjuncten der Elemente in der letzten Colonne von $D$ bezw. mit

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_\lambda.$$

Dann hat man das System der Identitäten

$$(1)\quad \begin{cases} A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_\lambda u_\lambda \equiv 0 \\ A_1 u_1' + A_2 u_2' + \cdots + A_\lambda u_\lambda' \equiv 0 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \\ A_1 u_1^{(\lambda-2)} + A_2 u_2^{(\lambda-2)} + \cdots + A_\lambda u_\lambda^{(\lambda-2)} \equiv 0 \\ A_1 u_1^{(\lambda-1)} + A_2 u_2^{(\lambda-1)} + \cdots + A_\lambda u_\lambda^{(\lambda-1)} \equiv 0, \end{cases}$$

1) Vergl. Christoffel, Crelles Journ. Bd. 55. (1858). S. 293.
Frobenius, „ „ „ 76. (1873). S. 237, 77. (1874). S. 246.
Pasch, „ „ „ 80. (1875). S. 177.
Tannery, Annales de l'école normale, 2me série, 4. (1875). S. 121.

von denen die $\lambda - 1$ ersten dadurch entstehen, dass die Elemente einer Colonne von $D$ mit den Adjuncten der Elemente einer andern Colonne componiert werden, während die letzte eine Folge des identischen Verschwindens von $D$ ist. Durch Differentiation der $\lambda - 1$ ersten Identitäten in (1) nach $x$ und jedesmalige Subtraktion der nächstfolgenden Identität ergiebt sich, wenn

$$\frac{dA_i}{dx} = A_i' \quad (i = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

gesetzt wird,

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1' u_1 + A_2' u_2 + \cdots + A_\lambda' u_\lambda = 0 \\ A_1' u_1' + A_2' u_2' + \cdots + A_\lambda' u_\lambda' = 0 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ A_1' u_1^{(\lambda-2)} + A_2' u_2^{(\lambda-2)} + \cdots + A_\lambda' u_\lambda^{(\lambda-2)} = 0 . \end{cases}$$

Sieht man also von der letzten Identität in (1) ab, so zeigt sich, dass die $\lambda$ Grössen $A$ und die $\lambda$ Grössen $A'$ *denselben* $\lambda - 1$ linearen homogenen Gleichungen genügen; hieraus folgt

$$(3)\qquad A_1 : A_2 : \cdots : A_\lambda = A_1' : A_2' : \cdots : A_\lambda' .$$

Nun wollen wir zunächst voraussetzen, dass keine der Grössen $A_1\, A_2 \ldots A_\lambda$ identisch Null, und dürfen dann annehmen, dass mindestens eine der Grössen $A_1'\, A_2' \ldots A_\lambda'$ nicht identisch Null ist. Wären nämlich die letzteren sämtlich identisch Null, so wären ja alle $A_1\, A_2 \ldots A_\lambda$ von $x$ unabhängig und das Bestehen einer linearen Abhängigkeit zwischen $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ wäre durch die erste der Identitäten (1) erwiesen. Sei also etwa $A_\lambda'$ nicht identisch Null; dann liefert (3) die Gleichungen

$$\frac{A_i}{A_\lambda} = \frac{A_i'}{A_\lambda'} \quad (i = 1, 2, \ldots, \lambda - 1)$$

oder

$$\frac{A_\lambda A_i' - A_i A_\lambda'}{A_\lambda A_\lambda'} = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A_i}{A_\lambda}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \lambda - 1);$$

d. h. die Quotienten $\dfrac{A_i}{A_\lambda}$ sind von $x$ unabhängig. Dividiert man also die erste der Identitäten (1) durch $A_\lambda$, so stellt

$$(4)\qquad \frac{A_1}{A_\lambda} u_1 + \frac{A_2}{A_\lambda} u_2 + \cdots + \frac{A_{\lambda-1}}{A_\lambda} u_{\lambda-1} + u_\lambda = 0$$

eine lineare Abhängigkeit zwischen $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ dar.

Ist nun eine der Determinanten $A_1\, A_2 \ldots A_\lambda$ identisch Null, was bisher ausgeschlossen wurde, so knüpft sich an das Verschwinden dieser Determinante, da sie aus $\lambda - 1$ der Functionen $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ geradeso gebildet ist, wie $D$ aus allen $u_1 \ldots u_\lambda$, genau dieselbe Discussion. Man findet daher in diesem Fall entweder eine lineare Abhängigkeit zwischen $\lambda - 1$ Functionen $u$, oder es ist wiederum eine der in Frage kommenden Unterdeterminanten Null, u. s. w. Da man aber auf diese Weise schliesslich zu den Determinanten zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} u_i & u_i' \\ u_k & u_k' \end{vmatrix}$$

herabsteigt, bei denen die Adjuncten der letzten Colonne je zwei der Functionen $u_1 \ldots u_\lambda$ selbst und daher sicher nicht identisch Null sind, so gelangt man spätestens bei diesen Determinanten dahin, dass die oben gemachte Voraussetzung thatsächlich erfüllt ist. In diesem äussersten Falle würde also schon zwischen irgend zweien der Functionen $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ eine lineare Abhängigkeit bestehen.

Hiermit ist der Satz ganz allgemein bewiesen.

**Satz 2:** *Sind*

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots, \psi_\lambda(x)$$

*$\lambda$ nach irgend welchen Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen von der Beschaffenheit, dass eine jede von ihnen nur solche Potenzen von $x$ enthält, die in keiner der übrigen auftreten, so sind die $\lambda$ Reihen linear unabhängig.*

Bestände nämlich eine lineare homogene Relation

$$C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + \cdots + C_\lambda\psi_\lambda \equiv 0 \tag{5}$$

mit von $x$ unabhängigen Coefficienten $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$, die für jeden Wert von $x$ erfüllt ist, so müssten die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $x$ auf der linken Seite von (5) gleich Null sein. Ist nun aber etwa $x^{\alpha_1}$ eine in $\psi_1$ wirklich auftretende Potenz, deren Coefficient $a_1$ also $\neq 0$ ist, so ist nach der Voraussetzung über die $\lambda$ Reihen $\psi$

$$C_1 a_1$$

der vollständige Coefficient von $x^{\alpha_1}$ auf der linken Seite von (5). Damit er verschwindet, muss also

$$C_1 = 0$$

sein. In gleicher Weise ergiebt sich das Verschwinden von $C_2 \ldots C_\lambda$ und damit die Unmöglichkeit einer Relation (5).

**Satz 3:** *Sind $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\lambda$ $\lambda$ nach Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen, deren sämtliche Exponenten sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden, und deren jede mit einem anderen Exponenten beginnt als alle übrigen, so sind sie linear unabhängig.*

*Beweis:* Jede der Reihen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\lambda$ denken wir uns in dem Sinne nach steigenden Potenzen von $x$ geordnet, dass die reellen Teile der Exponenten wachsen. Sind dann $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ die nach Voraussetzung von einander verschiedenen Anfangsexponenten von bezw. $\psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_\lambda$, so können wir annehmen, dass auch die reellen Teile dieser Zahlen bei der angegebenen Reihenfolge wachsen, $r_1$ also diejenige von ihnen mit dem kleinsten reellen Teil ist.

Bestände nun eine Relation

$$C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + \cdots + C_\lambda\psi_\lambda = 0 \tag{6}$$

mit von $x$ unabhängigen Coefficienten, so würde diese wieder das Verschwinden der einzelnen Potenzen von $x$ in (6) erfordern. Die Potenz $x^{r_1}$ kommt aber nur in $\psi_1$ vor, sodass zunächst $C_1 = 0$ sein muss. Dann wiederholt man aber denselben Schluss in Bezug auf die Reihen $\psi_2 \ldots \psi_\lambda$ u. s. w. und findet so, dass alle $C_1\, C_2 \ldots C_\lambda$ in (6) den Wert Null haben müssen, d. h. dass diese Relation unmöglich ist.

**Satz 4:** *Sind $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\lambda$ $\lambda$ linear unabhängige, sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende Reihen, in welchen die Exponenten sämtlicher Potenzen von $x$ sich nur um ganze Zahlen oder Null unterscheiden, so kann man $\lambda$ lineare homogene Verbindungen derselben bilden, die wieder linear unabhängig sind und lauter verschiedene Anfangsexponenten besitzen.*

*Beweis:* Die Reihen $\psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_\lambda$ seien in dieser Reihenfolge so geordnet, dass die reellen Teile der Anfangsexponenten nicht abnehmen. Keine der Reihen hat also einen Anfangsexponent mit kleinerem reellen Teil als $\psi_1$. Sind aber etwa die Anfangsexponenten von $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{\gamma-1}$ gleich dem von $\psi_1$, den wir $r_1$ nennen wollen, während derjenige von $\psi_\gamma$ einen grösseren reellen Teil hat, so kann man die Constanten $a_2\, a_3 \ldots a_{\gamma-1}$ derart wählen, dass

$$\psi_2 - a_2\psi_1, \quad \psi_3 - a_3\psi_1, \ldots, \psi_{\gamma-1} - a_{\gamma-1}\psi_1$$

nicht mehr zu $r_1$, sondern zu einem Exponenten mit grösserem reellen Teil gehören. Betrachten wir nun statt der ursprünglichen die $\lambda$ Reihen

$$\psi_1, \psi_2 - a_2\psi_1, \ldots, \psi_{\gamma-1} - a_{\gamma-1}\psi_1, \psi_\gamma, \ldots, \psi_\lambda, \tag{7}$$

so haben diese schon die Eigenschaft, dass nur noch $\psi_1$ zu dem Exponenten $r_1$ mit kleinstem reellen Teil gehört. Sie sind aber wiederum linear unabhängig; denn die Determinante dieser $\lambda$ Functionen ist (s. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 6. 1) als Produkt zweier

Faktoren darstellbar, deren einer die von Null verschiedene Determinante der $\lambda$ linear unabhängigen Functionen $\psi_1\ \psi_2 \ldots \psi_\lambda$, deren anderer die Determinante der Substitutionscoefficienten ist, vermöge deren sich die Functionen (7) durch die $\psi_1 \ldots \psi_\lambda$ ausdrücken, welche den Wert 1 hat.

Wiederholt man dieselbe Operation in Bezug auf die $\lambda - 1$ Functionen

$$\psi_2 - a_2\psi_1, \ldots, \psi_{\gamma-1} - a_{\gamma-1}\psi_1,\ \psi_\gamma, \ldots, \psi_\lambda,$$

so trennt man wieder eine Reihe ab, die zu einem Exponenten $r_2$ gehört, dessen reeller Teil grösser als der von $r_1$, aber kleiner als bei den $\lambda - 2$ übrigen Reihen ist, und die $\lambda$ jetzt an Stelle von $\psi_1 \ldots \psi_\lambda$ gesetzten Reihen sind wiederum linear unabhängig. U. s. w. Endlich gelangt man so zu $\lambda$ linear unabhängigen Reihen

$$\Psi_1 (\equiv \psi_1),\quad \Psi_2, \ldots, \Psi_\lambda,$$

die lineare homogene Verbindungen von $\psi_1\ \psi_2 \ldots \psi_\lambda$, wie diese linear unabhängig sind und bezw. zu $\lambda$ von einander verschiedenen Exponenten

$$r_1\ r_2 \ldots r_\lambda$$

gehören.

**Satz 5:** *Eine ganze rationale Function von* $\log x$, *deren Coefficienten — abgesehen höchstens von einem ihnen allen gemeinsamen Faktor* $x^r$ *— in einem Kreis oder Kreisring mit dem Mittelpunkt* $x = 0$ *eindeutig sind, verschwindet identisch nur dann, wenn die einzelnen Coefficienten der Potenzen von* $\log x$ *identisch verschwinden.*

*Beweis:* Wenn

$$(8)\qquad y = \psi_0 + \psi_1 \log x + \psi_2 \log^2 x + \cdots + \psi_\sigma \log^\sigma x \equiv 0,$$

wo die Functionen $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_\sigma$, abgesehen von dem ihnen allen gemeinsamen Faktor $x^r$, in dem gedachten Gebiet eindeutig sind, so ist auch die aus $y$ entstehende Function, wenn $x$ einen Umlauf um $x = 0$ beschreibt, die wir mit $\bar{y}$ bezeichnen, identisch Null. Berücksichtigt man (vergl. Art. 51), dass bei diesem Umlauf jede der Functionen $\psi$ sich nur mit dem Faktor

$$\omega = e^{2r\pi i}$$

multipliciert, $\log x$ aber um $2\pi i$ vermehrt, so erhält man für $\bar{y}$ einen Ausdruck (vergl. Art. 51 (11) und 56 (5) und (6)), dem man am einfachsten die Gestalt giebt

$$(9)\qquad \bar{y} = \omega\left[y + \frac{2\pi i}{1}\frac{\partial y}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!}\frac{\partial^\sigma y}{(\partial \log x)^\sigma}\right].$$

Nach der vorausgesetzten Identität (8) ist also auch

$$(10)\qquad \bar{y} - \omega y = \omega\left[\frac{2\pi i}{1}\frac{\partial y}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^{\sigma}}{\sigma!}\frac{\partial^{\sigma} y}{(\partial \log x)^{\sigma}}\right] = 0\,.$$

Dies ist aber eine ganze rationale Function von $\log x$ vom $(\sigma-1)^{\text{ten}}$ Grad, bei welcher der Coefficient von $\log^{\sigma-1} x$

$$\omega\,\frac{2\pi i}{1}\,\sigma\,\psi_{\sigma}$$

lautet, d. h. sich von $\psi_{\sigma}$ nur durch einen von Null verschiedenen constanten Faktor unterscheidet. Behandelt man den Ausdruck (10) geradeso wie vorher $y$, so kann man den Grad in $\log x$ abermals um die Einheit erniedrigen, u. s. w. Nach $\sigma$-maliger Wiederholung dieser Operation gelangt man zu dem Resultat, dass die mit einer von Null verschiedenen Constanten multiplicierte Function $\psi_{\sigma}$ identisch Null sein muss. Dann ergiebt sich aber das Gleiche ebenso für $\psi_{\sigma-1}$, $\psi_{\sigma-2}, \ldots, \psi_1$, und schliesslich unmittelbar für $\psi_0$, womit der Satz bewiesen ist.

Direkte Folgerungen aus Satz 5 sind die Sätze:

*Sind $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ ganze rationale Functionen von* $\log x$, *jede von einem anderen Grad in* $\log x$, *deren sämtliche Coefficienten, abgesehen höchstens von einem ihnen allen gemeinsamen Faktor $x^r$ in einem Kreis oder Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$, eindeutig sind, so sind dieselben linear unabhängig.*

*Sind $y_1\, y_2 \ldots y_\lambda$ ganze Functionen von* $\log x$, *deren Coefficienten, abgesehen höchstens von einem ihnen allen gemeinsamen Faktor in einem Kreis oder Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$, eindeutig sind, und sind in den Functionen desselben Grades in* $\log x$ *die Coefficienten der höchsten Potenz von* $\log x$ *immer linear unabhängig, so sind auch $y_1\, y_2 \ldots y_\lambda$ selbst linear unabhängig.*

Der erste dieser beiden Sätze kann offenbar als Specialfall des zweiten angesehen werden.

**Satz 6:** *Eine Function der Gestalt*

$$y = u_1 + u_2 + \cdots + u_\lambda,$$

*wo*

$$\begin{aligned}
u_1 &= \psi_{10} + \psi_{11}\log x + \cdots + \psi_{1\sigma_1}\log^{\sigma_1} x\\
u_2 &= \psi_{20} + \psi_{21}\log x + \cdots + \psi_{2\sigma_2}\log^{\sigma_2} x\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
u_\lambda &= \psi_{\lambda 0} + \psi_{\lambda 1}\log x + \cdots + \psi_{\lambda\sigma_\lambda}\log^{\sigma_\lambda} x,
\end{aligned}$$

*sämtliche $\psi_1$ abgesehen von dem Faktor $x^{r_1}$, sämtliche $\psi_2$, abgesehen von dem Faktor $x^{r_2}$,* u. s. w., *in einem Kreis oder Kreisring mit dem Mittel-*

*punkt $x=0$ eindeutig sind und sich nicht zwei der Zahlen $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ um eine ganze Zahl oder Null unterscheiden, verschwindet identisch nur dann, wenn sämtliche $\psi$ identisch Null sind*[1]).

*Beweis:* Wenn

$$(11) \qquad y \equiv u_1 + u_2 + \cdots + u_\lambda \equiv 0$$

ist, so ist auch die aus $y$ durch einen Umlauf von $x$ um $x=0$ entstehende Function $\bar{y}$ identisch Null, d. h.

$$\bar{y} \equiv \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \cdots + \bar{u}_\lambda \equiv 0$$

oder, wenn

$$e^{2r_1\pi i} \equiv \omega_1, \; e^{2r_2\pi i} \equiv \omega_2, \ldots, e^{2r_\lambda \pi i} \equiv \omega_\lambda$$

gesetzt wird, wobei alle $\omega$ von einander und von Null verschieden sind,

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\omega_1 \left[u_1 + \frac{2\pi i}{1} \frac{\partial u_1}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^{\sigma_1}}{\sigma_1 !} \frac{\partial^{\sigma_1} u_1}{(\partial \log x)^{\sigma_1}}\right] \\ &+ \omega_2 \left[u_2 + \frac{2\pi i}{1} \frac{\partial u_2}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^{\sigma_2}}{\sigma_2 !} \frac{\partial^{\sigma_2} u_2}{(\partial \log x)^{\sigma_2}}\right] \\ &+ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ &+ \omega_\lambda \left[u_\lambda + \frac{2\pi i}{1} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^{\sigma_\lambda}}{\sigma_\lambda !} \frac{\partial^{\sigma_\lambda} u_\lambda}{(\partial \log x)^{\sigma_\lambda}}\right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der mit $\omega_1$ multiplicierten Identität (11) von (12) folgt aber

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\omega_1 \left[\frac{2\pi i}{1} \frac{\partial u_1}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^{\sigma_1}}{\sigma_1 !} \frac{\partial^{\sigma_1} u_1}{(\partial \log x)^{\sigma_1}}\right] \\ &+ (\omega_2 - \omega_1) u_2 + \omega_2 \left[\frac{2\pi i}{1} \frac{\partial u_2}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^{\sigma_2}}{\sigma_2 !} \frac{\partial^{\sigma_2} u_2}{(\partial \log x)^{\sigma_2}}\right] \\ &+ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ &+ (\omega_\lambda - \omega_1) u_\lambda + \omega_\lambda \left[\frac{2\pi i}{1} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \log x} + \cdots + \frac{(2\pi i)^{\sigma_\lambda}}{\sigma_\lambda !} \frac{\partial^{\sigma_\lambda} u_\lambda}{(\partial \log x)^{\sigma_\lambda}}\right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Die linke Seite von (13) ist nun eine Function von derselben Gestalt wie $y$; die höchste Potenz von $\log x$ ist in jeder Zeile mit einer Function multipliciert, die sich nur durch einen von Null verschiedenen constanten Faktor von derjenigen unterscheidet, mit der die höchste Potenz von $\log x$ in dem entsprechenden Teil von $y$, d. h. in der entsprechenden Function $u$ multipliciert ist; aber in der ersten Zeile von (13), d. h. in dem aus $u_1$ entstandenen Teil ist der Grad in $\log x$ um

---

1) Vergl. Thomé, Crelles Journ. Bd. 74. (1872). S. 195; Tannery, Ann. de l'école norm. 2me sér. 4. (1875). S. 144.

Eins erniedrigt. Nimmt man also mit (13) die analoge Operation vor und wiederholt das Verfahren im Ganzen $\sigma_1$-mal, so wird die von $u_1$ herrührende Zeile in dem entstehenden Ausdruck, der identisch Null ist, ganz verschwunden sein, während der Grad der übrigen Zeilen in $\log x$ derselbe geblieben ist wie in den entsprechenden $u$ und die höchste Potenz von $\log x$ in jeder dieser Zeilen, abgesehen von einem von Null verschiedenen constanten Faktor, immer noch mit derselben Function $\psi$ wie dort multipliciert ist.

In gleicher Weise reducieren wir den Ausdruck weiter, indem wir auch die von $u_2, u_3, \ldots, u_{\lambda-1}$ herrührenden Teile ganz zum Wegfall bringen und endlich den Grad des aus $u_\lambda$ herrührenden Teiles in $\log x$ von $\sigma_\lambda$ auf 0 erniedrigen. Dann ergiebt sich also das identische Verschwinden der mit einer von Null verschiedenen Constanten multiplicierten Function $\psi_{\lambda\sigma_\lambda}$, d. h.

$$\psi_{\lambda\sigma_\lambda} \equiv 0.$$

Ebenso folgt nun natürlich das identische Verschwinden sämtlicher anderen $\psi_\lambda$, dann sämtlicher $\psi_{\lambda-1}$, u. s. w., endlich sämtlicher $\psi_1$ und zwar das der letzteren sämtlich gleichzeitig, da ja, wenn erst die Identität

$$y_1 \equiv u_1 \equiv 0$$

erwiesen ist, Satz 5 zur Anwendung gelangt.

Unmittelbare Folgerungen des hiermit bewiesenen Satzes 6 sind wieder die Sätze:

*Functionen $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ von der in Satz 6 angegebenen Art sind linear unabhängig.*

*Sind $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ Functionen der in Satz 6 angegebenen Art, bei denen jedoch die Zahlen $r_1\, r_2 \ldots r_\lambda$ sich derart in mehrere Gruppen sondern, dass die Zahlen derselben Gruppe sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden, so zerfällt eine lineare homogene Relation zwischen $u_1\, u_2 \ldots u_\lambda$ in mehrere solche, deren jede nur die zu den Zahlen $r$ ein und derselben Gruppe gehörigen Functionen $u$ enthält.*

---

## Zu Kapitel V.

*Wenn die Determinante*

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

*den Wert Null hat, so genügen die Elemente jeder Zeile (und ebenso die jeder Colonne) ein und derselben linearen homogenen Relation*

$$(2)\quad \begin{cases} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + \cdots + C_n a_{1n} = 0 \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + \cdots + C_n a_{2n} = 0 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \\ C_1 a_{n1} + C_2 a_{n2} + \cdots + C_n a_{nn} = 0\,, \end{cases}$$

*in der nicht sämtliche Coefficienten $C$ Null sind.*

Fasst man nämlich in den Gleichungen (2) $C_1\,C_2 \ldots C_n$ als die Unbekannten auf, so liefert das Gleichungssystem (2) für diese ein Wertsystem, bei dem mindestens eine der Grössen $C$ nicht den Wert Null hat, sobald die Determinante des Systems, die ja mit $D$ identisch ist, verschwindet. (Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. Leipzig, 1881, § 8. 2. S. 72 ff.).

---

## Zu Kapitel VII.

*Wenn die bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende Function*

$$\Psi \equiv \psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_\sigma \log^\sigma x \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

*zu dem an $\gamma^{ter}$ Stelle* $(\gamma = 1, 2, 3, \ldots)$ *stehenden Exponenten $\varrho$ gehört, so verhält sich die Function*

$$\int \Psi\, dx$$

*bei $x = 0$ ebenfalls bestimmt und gehört zu dem Exponenten $\varrho + 1$, der, wenn $\varrho = -1$ ist, an $(\gamma + 1)^{ter}$, andernfalls an $\gamma^{ter}$ Stelle steht. Ist $\varrho$ eine negative ganze Zahl, so gilt dieser Satz für einen beliebigen Wert der Integrationsconstanten, andernfalls muss dieselbe gleich Null gesetzt werden.*

*Beweis:* Wir beweisen den Satz zunächst für den Specialfall $\sigma = 0$; es sei also

$$(1)\qquad \psi \equiv \sum_{(k)} c_k x^k \qquad (k = \varrho,\ \varrho + 1, \ldots)$$

eine zu der beliebigen Zahl $\varrho$ gehörige Reihe. Dann ist, wenn wir die Integrationsconstante zunächst fortlassen,

$$(2)\qquad \int \psi\, dx = \sum_{(k)} \frac{c_k}{k+1}\, x^{k+1} + c_{-1} \log x,$$
$$(k = \varrho,\ \varrho + 1, \ldots;\ k \neq -1)$$

wo der Coefficient $c_{-1}$ (und folglich $\log x$) nur dann auftreten kann, wenn $\varrho$ eine negative ganze Zahl ist, und sicher von Null verschieden ist, wenn $\varrho$ den Wert $-1$ hat. Setzen wir also

$$\int \psi \, dx = \chi + c_{-1} \log x, \tag{2^a}$$

so gehört die Reihe $\chi$ im allgemeinen zu $\varrho + 1$, nur, wenn $\varrho = -1$, zu einem grösseren Exponenten. Die Constante $c_{-1}$, welche mit $\log x$ multipliciert ist, müssen wir aber als eine zu dem Exponenten 0 gehörige Function bezeichnen. Der Coefficient von $\log x$ in ($2^a$) gehört daher, falls er nicht identisch Null ist, zu einem Exponenten, der $> \varrho + 1$, und nur, wenn $\varrho = -1$ ist, zu $\varrho + 1$ selbst. Das Integral (2) oder ($2^a$) gehört folglich stets zu $\varrho + 1$; dieser Exponent steht, wenn $\varrho = -1$, an zweiter, andernfalls immer an erster Stelle. Diese Eigenschaft wird offenbar, falls $\varrho$ eine negative ganze Zahl ist, nicht alteriert, wenn man dem Integral nun noch eine willkürliche Constante $c$ hinzufügt. Diese Constante ersetzt dann nämlich in der Reihe $\chi$ das fehlende, von $x$ unabhängige Glied. Hat aber $\varrho$ nicht einen negativen ganzzahligen Wert, so muss die Constante Null sein; andernfalls würde nämlich $c + \chi$, wenn $\varrho$ gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl, zu einem kleineren Exponenten als $\varrho + 1$ gehören, und, wenn $\varrho$ überhaupt nicht ganzzahlig wäre, gar nicht mehr eine sich bestimmt verhaltende Reihe im engeren Sinne zu nennen sein, weil sie Potenzen enthielte (z. B. die $0^{\text{te}}$ ($c$) und $(\varrho + 1)^{\text{te}}$), deren Exponenten sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. — Damit ist der Satz für den Specialfall $\sigma = 0$ vollständig bewiesen.

Bei dem allgemeinen Beweis des Satzes verfolgen wir nur noch den Fall, dass $\varrho$ *eine negative ganze Zahl* ist, da diese Voraussetzung bei der Anwendung in Artikel 48 und 49 stets zutrifft und im übrigen der Beweis für den entgegengesetzten Fall sich noch erheblich einfacher gestaltet und aus dem hier zu führenden unmittelbar abzulesen ist.

Wir setzen

$$\psi_\lambda = \sum_{(k)} c_k^{(\lambda)} x^k \quad (k = \varrho_\lambda, \varrho_\lambda + 1, \ldots) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, \sigma), \tag{3}$$

sodass die Reihen $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_\sigma$ in $\Psi$ bezw. zu den Exponenten $\varrho_0, \varrho_1 \ldots \varrho_\sigma$ gehören. Da nach Voraussetzung $\Psi$ zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\varrho$ gehört, ist

$$\begin{cases} \varrho_{\gamma-1} = \varrho \\ \varrho_{\gamma-\alpha} \geq \varrho & (\alpha = 2, 3, \ldots, \gamma) \\ \varrho_{\gamma+\alpha} > \varrho & (\alpha = 0, 1, \ldots, \sigma - \gamma); \end{cases} \tag{4}$$

es ist daher sehr wohl möglich, dass, wenn auch $\varrho = \varrho_{\gamma-1}$ eine negative ganze Zahl ist, $\varrho_\lambda$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, \gamma - 2, \gamma, \ldots, \sigma)$ gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl ist.

Nun haben wir die Integrale

$$(5)\qquad \int \psi_\lambda \log^\lambda x\, dx \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

zu bilden; denn dass das für $\lambda = 0$ aus (5) entstehende Integral, wenn die willkürliche Integrationsconstante gleich Null gesetzt wird, stets eine zu $\varrho_0 + 1$ gehörige Function ist, bei welcher dieser Exponent an zweiter oder erster Stelle steht, je nachdem $\varrho_0 = -1$ ist oder einen andern Wert hat, wissen wir bereits aus der vorangehenden Betrachtung. Die Integrationsconstante dürfen wir aber in diesem und in den Integralen (5) gleich Null setzen, wenn wir schliesslich der aus allen diesen Integralen zu bildenden Summe eine willkürliche Constante hinzufügen.

Durch partielle Integration ergiebt sich

$$(6)\qquad \int \psi_\lambda \log^\lambda x\, dx = \log^\lambda x \int \psi_\lambda dx - \int \frac{\lambda}{x} \log^{\lambda-1} x\, dx \int \psi_\lambda dx.$$

Nun ist nach (2[a])

$$(7)\qquad \int \psi_\lambda\, dx = \chi_\lambda + c_{-1}^{(\lambda)} \log x,$$

wo die willkürliche Constante dieser Integration natürlich gleich Null gesetzt werden darf, da sie sich sonst in der Gleichung (6) doch fortheben würde. In $\chi_\lambda$ fehlt daher sicher das von $x$ unabhängige Glied, und die Function (7) gehört zu $\varrho_\lambda + 1$, welcher Exponent im allgemeinen an erster und nur dann an zweiter Stelle steht, wenn $\varrho_\lambda = -1$ ist. Demnach wird aus (6)

$$(8)\qquad \int \psi_\lambda \log^\lambda x\, dx = \chi_\lambda \log^\lambda x + \frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{\lambda + 1} \log^{\lambda+1} x - \int \frac{\lambda}{x} \chi_\lambda \log^{\lambda-1} x\, dx,$$

wo die beiden ersten Glieder rechts eine zu der an $(\lambda + 1)^{\text{ter}}$, bezw. — wenn $\varrho_\lambda = -1$ — an $(\lambda + 2)^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Zahl $\varrho_\lambda + 1$ gehörige Function bilden. Unter dem Integralzeichen aber steht eine Function von derselben Gestalt wie in dem Integral (5), nur ist der Grad in $\log x$ um Eins erniedrigt, während die an Stelle von $\psi_\lambda$ tretende Reihe

$$\frac{\lambda}{x} \chi_\lambda$$

zu einem Exponenten gehört, der $\geq \varrho_\lambda$, und die Potenz $x^{-1}$ *nicht* enthält. Nimmt man daher mit diesem Integral dieselbe Umwandlung vor, wie vorher in Formel (8) mit (5), so folgt

$$(9)\qquad -\int \frac{\lambda}{x} \chi_\lambda \log^{\lambda-1} x\, dx = \chi_{\lambda 1} \log^{\lambda-1} x - \int \frac{\lambda - 1}{x} \chi_{\lambda 1} \log^{\lambda-2} x\, dx,$$

wo $\chi_{\lambda 1}$ zu einem Exponenten gehört, der $\geq \varrho_\lambda + 1$ und kein von $x$ unabhängiges Glied enthält, ein Glied mit $\log^\lambda x$ aber nicht auftritt.

Fährt man so fort, so erniedrigt sich also bei jedem Schritt der Grad in $\log x$ unter dem Integralzeichen, und man erhält schliesslich

(10)
$$\int \psi_\lambda \log^\lambda x\, dx =$$
$$\chi_{\lambda\lambda} + \chi_{\lambda,\lambda-1} \log x + \cdots + \chi_{\lambda 1} \log^{\lambda-1} x + \chi_\lambda \log^\lambda x + \frac{c^{(\lambda)}_{-1}}{\lambda+1} \log^{\lambda+1} x,$$

wo $\chi_{\lambda\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda)$ zu einem Exponenten gehört, der $\geq \varrho_\lambda + 1$; $\chi_\lambda$ gehört genau zu $\varrho_\lambda + 1$, es sei denn $\varrho_\lambda = -1$, in welchem Falle $\chi_\lambda$ zu einem grösseren Exponenten gehört, wofür aber dann $c^{(\lambda)}_{-1} \neq 0$ ist und eine zu $\varrho_\lambda + 1$ gehörige Function darstellt. Folglich gehört das Integral
$$\int \psi_\lambda \log^\lambda x\, dx$$
zu $\varrho_\lambda + 1$ und zwar im allgemeinen zu diesem an $(\lambda + 1)^{\text{ter}}$, und nur, wenn $\varrho_\lambda = -1$, an $(\lambda + 2)^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten. Damit ist unser Satz auch für die einzelnen Integrale (5) bewiesen.

Um nun endlich die gesuchte Function $\int \mathfrak{P}\, dx$ herzustellen, müssen wir Gleichung (10) für $\lambda = 0, 1, \ldots, \sigma$ bilden und alle diese Gleichungen addieren. Wenn wir also jetzt noch die willkürliche Constante $c$ hinzufügen, so erhalten wir

(11)
$$\int \mathfrak{P}\, dx$$
$$\begin{aligned}
&c + \chi_0 + \chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33} + \cdots\cdots + \chi_{\sigma\sigma} \\
&+ \log x\, [c^{(0)}_{-1} + \chi_1 + \chi_{21} + \chi_{32} + \cdots\cdots + \chi_{\sigma,\sigma-1}] \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad + \log^{\gamma-1} x \left[\frac{c^{(\gamma-2)}_{-1}}{\gamma-1} + \chi_{\gamma-1} + \chi_{\gamma 1} + \cdots + \chi_{\sigma,\sigma-\gamma+1}\right] \\
&\qquad\quad + \log^{\gamma} x \left[\frac{c^{(\gamma-1)}_{-1}}{\gamma} + \chi_\gamma + \cdots + \chi_{\sigma,\sigma-\gamma}\right] \\
&\qquad\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\quad + \log^{\sigma} x \left[\frac{c^{(\sigma-1)}_{-1}}{\sigma} + \chi_\sigma\right] \\
&\qquad\qquad\qquad + \log^{\sigma+1} x\, \frac{c^{(\sigma)}_{-1}}{\sigma+1}.
\end{aligned}$$

Hier gehört der von $\log x$ freie Teil nach der vorangehenden Entwicklung und mit Rücksicht auf (4) zu einem Exponenten, der $\geq \varrho + 1$, und zwar, da $\varrho = \varrho_{\gamma-1}$ eine negative ganze Zahl sein sollte, auch bei von Null verschiedenem Wert von $c$. Das Gleiche gilt von den Coefficienten von $\log x$, $\log^2 x, \ldots, \log^{\gamma-2} x$. Nehmen wir sodann an, dass $\varrho < -1$ sei, so gehört der Coefficient von $\log^{\gamma-1} x$ genau zu $\varrho + 1$, die

Coefficienten der höheren Potenzen von $\log x$ aber zu Exponenten, die $> \varrho + 1$ sind. Mithin gehört unter dieser Voraussetzung der ganze Ausdruck (11) zu dem an $\gamma^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\varrho + 1$.

Ist dagegen $\varrho = \varrho_{\gamma-1} = -1$, so gehört der Coefficient von $\log^{\gamma-1} x$ zu $\varrho + 1 = 0$, wenn $c_{-1}^{(\gamma-2)} \neq 0$, sonst zu einem Exponenten, der $> \varrho + 1$. Da aber alsdann $c_{-1}^{(\gamma-1)} \neq 0$ ist, so gehört der Coefficient von $\log^{\gamma} x$ genau zu $\varrho + 1$. Die Coefficienten aller folgenden Potenzen von $\log x$ gehören aber zu Exponenten, die $> \varrho + 1$ sind; denn von den in ihnen auftretenden Reihen $\chi$ ist dies gezeigt worden, wenn man wieder die Formeln (4) berücksichtigt; die Constanten

$$c_{-1}^{(\gamma)}, \quad c_{-1}^{(\gamma+1)}, \ldots, c_{-1}^{(\sigma)}$$

sind aber bei der jetzigen Annahme ($\varrho_{\gamma-1} = -1$), der zufolge die Reihen $\psi_\gamma, \psi_{\gamma+1}, \ldots, \psi_\sigma$ überhaupt keine negativen Potenzen von $x$ enthalten, sämtlich Null. Folglich gehört in diesem Falle der Ausdruck (11) zu dem an $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\varrho + 1$, womit nunmehr unser Satz ganz allgemein erwiesen ist.

## Zu Kapitel X.

*Wenn*

$$y = f(x, u)$$

*eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen $x$ und $u$ ist, für welche die Identität*

$$\frac{\partial^\tau}{\partial u^\tau}\left(\frac{\partial^\varrho y}{\partial x^\varrho}\right) = \frac{\partial^\varrho}{\partial x^\varrho}\left(\frac{\partial^\tau y}{\partial u^\tau}\right)$$

*besteht, so ist auch, falls $u$ gleich einer differenzierbaren Function von $x$*

$$u = \varphi(x)$$

*gesetzt wird,*

$$\frac{\partial^\tau}{\partial u^\tau}\left(\frac{d^\varrho y}{d x^\varrho}\right) = \frac{d^\varrho}{d x^\varrho}\left(\frac{\partial^\tau y}{\partial u^\tau}\right).$$

*Beweis:* Es genügt, den Beweis für $\varrho = \tau = 1$ zu führen, da sich alsdann der allgemeine Satz für beliebige Werte von $\varrho$ und $\tau$ durch wiederholte Anwendung des bewiesenen Specialfalles ergiebt.

Wir bezeichnen mit

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}$$

die partiellen, ohne Rücksicht darauf, dass $u$ und $x$ von einander abhängig sind, nach $x$ und $u$ genommenen Ableitungen der Function $y \equiv f(x, u)$. Dann ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\varphi'(x), \tag{1}$$

wenn

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$$

gesetzt wird. Andererseits ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\varphi'(x), \tag{2}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial u} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\varphi'(x). \tag{3}$$

Da aber nach Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial u} = \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial x},$$

so folgt aus (1) und (3)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right), \quad \text{w. z. b. w.} \tag{4}$$

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind bei der Anwendung desselben im Texte (S. 146) erfüllt. Denn dort ist $v_\alpha$ eine Function der Gestalt

$$v_\alpha = \psi_\alpha + \psi_{\alpha 1} u + \cdots + \psi_{\alpha \lambda} u^{\lambda},$$

wo

$$u = \log x$$

und die $\psi$ in einem gewissen Gebiet convergente Reihen sind, in welchen die Exponenten der Potenzen von $x$ sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden.

## Zu Kapitel XI.

*Beweis der* S. 155 *benutzten Determinantenformel.*

Die Determinante

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \delta_{11} - \gamma_{11}\omega, & \ldots, & \delta_{1n} - \gamma_{1n}\omega \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \delta_{n1} - \gamma_{n1}\omega, & \ldots, & \delta_{nn} - \gamma_{nn}\omega \end{vmatrix}$$

(Art. 76 (13)) entsteht sowohl durch Composition der Zeilen von $C$ mit den Zeilen von $A(\omega)$, als auch durch Composition der Colonnen von

$B(\omega)$ mit den Colonnen von $C$. Wir fassen zunächst die erstere Entstehungsweise in's Auge. Greifen wir dann eine beliebige Unterdeterminante $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $D(\omega)$ heraus

$$d_{ik}\,,$$

so wird diese gebildet, indem in $D(\omega)$ irgend welche $\nu$ Zeilen, etwa die Zeilen $i_1, i_2 \ldots i_\nu$, und irgend welche $\nu$ Colonnen, etwa die Colonnen $k_1, k_2 \ldots k_\nu$ gestrichen werden, wo sowohl die $i$ wie die $k$ $\nu$ verschiedene der Zahlen $1, 2, , \ldots, n$ sind. Dass eine solche bestimmte Combination von $\nu$ Zeilen $(i_1\, i_2 \ldots i_\nu)$ und eine bestimmte Combination von $\nu$ Colonnen $(k_1\, k_2 \ldots k_\nu)$ gestrichen sind, soll eben bei der Bezeichnung $d_{ik}$ der erste, bezw. zweite Index andeuten. Nach der jetzt für $D(\omega)$ zu Grunde gelegten Entstehungsweise kann man daher dieselbe Determinante $d_{ik}$ auch aus zwei rechteckigen Systemen, deren erstes aus dem System der Elemente von $C$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

durch Streichung der Zeilen $i_1\, i_2 \ldots i_\nu$, deren zweites aus dem System der Determinante $A(\omega)$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \omega, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{1n}\quad, & \ldots, & \alpha_{nn} - \omega \end{pmatrix}$$

durch Streichung der Zeilen $k_1\, k_2 \ldots k_\nu$ hervorgeht, erzeugen, indem die Zeilen des ersten mit den Zeilen des zweiten componiert werden. Nach dem Satz über die Determinante eines componierten Systems (Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det, 5. Aufl. § 6. 1. S. 48) ist demnach $d_{ik}$ gleich der Summe der Produkte von je zwei Determinanten, die aus den beiden rechteckigen Systemen entstehen, wenn jedesmal in beiden dieselben $\nu$ Colonnen gestrichen werden. Bei der von uns eingeführten Bezeichnung für die Unterdeterminanten von $C$ und $A(\omega)$ sind aber diese miteinander multiplicierten Determinanten

$$c_{i\lambda} \text{ und } a_{k\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, .., \mu),$$

wo $\lambda$ andeutet, dass eine bestimmte der $\binom{n}{\nu} \equiv \mu$ vorhandenen Combinationen von $\nu$ der $n$ Colonnen gestrichen ist. Es ist also nach dem citierten Determinantensatz

$$d_{ik} = c_{i1}a_{k1} + c_{i2}a_{k2} + \cdots + c_{i\mu}a_{k\mu}\,,$$

womit die eine der in Artikel 77 (S. 155) benutzten Formeln erwiesen ist.

Denkt man sich $D(\omega)$ auf die zweite Art erzeugt, so beweist man ganz ebenso die zweite Formel

$$d_{ik} = b_{1i}c_{1k} + b_{2i}c_{2k} + \cdots + b_{\mu i}c_{\mu k}.$$

---

## Zu Kapitel XII.

1) *Nachweis der* S. 166 *benutzten Identität*

$$\overline{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right)} \equiv \frac{d}{dx}\overline{\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right)}, \tag{1}$$

wo $\eta_1$ ein in einem Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$ gültiges und in diesem Gebiet abgesehen von dem Faktor $x^{r_1}$ eindeutiges Integral, $y_i$ ein reguläres Integral ist, das für die Umgebung der in jenem Kreisring liegenden Stelle $x_0$ definiert ist.

Wir beweisen zunächst die Identität

$$\overline{\frac{dy_i}{dx}} \equiv \frac{d\overline{y_i}}{dx}. \tag{2}$$

Das Integral $y_i$ hat als reguläres Integral bei $x = x_0$ die Gestalt

$$y_i \equiv c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots. \tag{3}$$

Macht nun $x$ einen Umlauf von $x_0$ aus um $x = 0$, so hat nach demselben die aus $y_i$ entstehende Function $\overline{y_i}$ abermals die Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe von $x - x_0$

$$\overline{y_i} \equiv \overline{c_0} + \overline{c_1}(x - x_0) + \overline{c_2}(x - x_0)^2 + \cdots, \tag{4}$$

d. h. bei dem Umlauf verwandelt sich

$$c_k \text{ in } \overline{c_k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots,).$$

Aus (4) folgt

$$\frac{d\overline{y_i}}{dx} \equiv \overline{c_1} + 2\overline{c_2}(x - x_0) + \cdots. \tag{5}$$

Andererseits ist

$$\frac{dy_i}{dx} \equiv c_1 + 2c_2(x - x_0) + \cdots. \tag{6}$$

Da aber bei dem Umlauf die $c$ in die überstrichenen $c$ übergehen, so ist

$$\overline{\frac{dy_i}{dx}} \equiv \overline{c_1} + 2\overline{c_2}(x - x_0) + \cdots, \tag{7}$$

und aus der Uebereinstimmung der rechten Seiten von (5) und (7) folgt die zunächst zu beweisende Identität (2)

$$\overline{\frac{dy_i}{dx}} \equiv \frac{d\overline{y_i}}{dx}.$$

Nun ist (s. S. 166 Zeile 10)

(8) $$\overline{y_i} = \beta_{i1}\eta_1 + \beta_{i2} y_2 + \cdots + \beta_{in} y_n\,,$$

also

(9) $$y_i' = \beta_{i1}\eta_1' + \beta_{i2} y_2' + \cdots + \beta_{in} y_n'\,,$$

wo die Accente die Ableitungen nach $x$ bedeuten; nach (2) ist folglich auch

(10) $$y_i' = \beta_{i1}\eta_1' + \beta_{i2} y_2' + \cdots + \beta_{in} y_n'\,.$$

Das Integral $\eta_1$ hat die Umlaufsrelation

(11) $$\overline{\eta_1} = \omega_1 \eta_1\,,$$

wo

$$\omega_1 = e^{2r_1\pi i}\,.$$

Da aber auch die Ableitung von $\eta_1$ wieder eine bis auf den Faktor $x^{r_1}$ eindeutige Function ist, so ist

(12) $$\frac{d\overline{\eta_1}}{dx} = \omega_1 \frac{d\eta_1}{dx}\,.$$

Nach (11) ist aber

(13) $$\overline{\frac{d\eta_1}{dx}} = \omega_1 \frac{d\eta_1}{dx}\,,$$

mithin auch für dieses Integral

(14) $$\overline{\frac{d\eta_1}{dx}} = \frac{d\overline{\eta_1}}{dx}\,.$$

Jetzt können wir die Identität (1) als richtig erweisen, indem wir deren beide Seiten bilden. Es ist

$$\overline{\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right)} = \frac{\overline{y_i}}{\overline{\eta_1}} = \frac{1}{\omega_1}\left(\beta_{i1} + \beta_{i2}\frac{y_2}{\eta_1} + \cdots + \beta_{in}\frac{y_n}{\eta_1}\right)$$

und

(15) $$\frac{d}{dx}\overline{\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right)} = \frac{1}{\omega_1\eta_1^2}\left[\beta_{i2}(\eta_1 y_2' - y_2\eta_1') + \cdots + \beta_{in}(\eta_1 y_n' - y_n\eta_1')\right].$$

Andererseits ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right) = \frac{\eta_1 y_i' - y_i\eta_1'}{\eta_1^2}$$

und

$$\overline{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right)} = \frac{\overline{\eta_1}\,\overline{y_i'} - \overline{y_i}\,\overline{\eta_1'}}{\overline{\eta_1}^2}\,,$$

d. h. nach (8), (10), (11), (12)

(16) $$\overline{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right)} =$$

$$\frac{1}{\omega_1\eta_1^2}\left[\eta_1(\beta_{i1}\eta_1' + \beta_{i2} y_2' + \cdots + \beta_{in} y_n') - \eta_1'(\beta_{i1}\eta_1 + \beta_{i2} y_2 + \cdots + \beta_{in} y_n)\right].$$

Die rechten Seiten von (15) und (16) stimmen überein; daraus folgt die zu beweisende Identität (1)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right).$$

2) *Satz von Casorati*[1]*: Wenn der $\lambda$-fache Linearteiler $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ der Determinante*

$$A(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, \ldots, & 0 & , & \alpha_{\nu_0+1,1} & , \ldots, & \alpha_{n1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & , \ldots, \omega_1 - \omega, & & \alpha_{\nu_0+1,\nu_0} & , \ldots, & \alpha_{n\nu_0} \\ 0 & , \ldots, & 0 & , \alpha_{\nu_0+1,\nu_0+1} - \omega & , \ldots, & \alpha_{n,\nu_0+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & , \ldots, & 0 & , \alpha_{\nu_0+1,n} & , \ldots, & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

*die $\nu_0$ Elementarteiler*

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda-\lambda_1}, \quad (\omega_1 - \omega)^{\lambda_1-\lambda_2}, \ldots, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_0-1}}$$

*derselben liefert, so liefert der $(\lambda - \nu_0)$-fache Linearteiler $(\omega_1 - \omega)^{\lambda-\nu_0}$ der Determinante*

$$A'(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{\nu_0+1,\nu_0+1} - \omega, \ldots, & \alpha_{n,\nu_0+1} \\ \cdot \quad \cdots & \cdot \\ \alpha_{\nu_0+1,n} \quad , \ldots, & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

*die Elementarteiler*

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda-\lambda_1-1}, \quad (\omega_1 - \omega)^{\lambda_1-\lambda_2-1}, \ldots, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_0-1}-1}$$

*von $A'(\omega)$, sodass die Anzahl der Elementarteiler von $A'(\omega)$ um die Anzahl der einfachen Elementarteiler von $A(\omega)$ hinter der Gesamtzahl von deren Elementarteilern zurückbleibt.*

Wir beweisen zunächst die Reihe der Ungleichungen

(17) $$\lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{\nu_0-1},$$

um dieselben beim Beweis des Casorati'schen Satzes benutzen zu können. Zu dem Ende gehen wir von der allgemeineren Determinante

$$\Delta = |\alpha_{ik} - \beta_{ik}\,\omega| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

aus, welche durch $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ teilbar sei, während der grösste gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten erster Stufe von $\Delta$ $(\omega_1 - \omega)$ in der Potenz $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1}$ enthält, derjenige aller Unterdeterminanten zweiter Stufe in der Potenz $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_2}$ u. s. w., der grösste gemeinsame Teiler

1) Vergl. Comptes rendus hebd. des séances de l'acad. des sciences de Paris, t. 92 (1881). S. 175 u. 238.

aller Unterdeterminanten $\nu_0^{\text{ter}}$ Stufe aber $\omega_1 - \omega$ gar nicht mehr enthält.

Bezeichnet man die Adjuncten der Elemente von $\varDelta$ bezw. mit

$$\varDelta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist (s. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 3. 14. 15. S. 28, 29)

$$\frac{d\varDelta}{d\omega} \equiv -\sum_{(i,k)} \beta_{ik} \varDelta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Da nun die linke Seite von (18) nur durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - 1}$ teilbar ist, kann auch der grösste gemeinsame Teiler aller $\varDelta_{ik}$ $\omega_1 - \omega$ höchstens in dieser Potenz enthalten, d. h.

$$\lambda_1 \leqq \lambda - 1.$$

Hiermit ist die erste der Ungleichungen (17) erwiesen, und ebenso ergiebt sich die Richtigkeit der übrigen.

Um nun den Casorati'schen Satz selbst zu beweisen, haben wir die Elementarteiler von $A'(\omega)$ aufzusuchen. Zu dem Ende zeigen wir, dass der grösste gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten von $A'(\omega)$

erster Stufe durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1 - \nu_0 + 1}$,

zweiter „ „ $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_2 - \nu_0 + 2}$,

u. s. w.,

überhaupt der grösste gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$ durch

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$$

und keine höhere Potenz von $\omega_1 - \omega$ teilbar ist, wenn $\nu$ einen der Werte $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_1$ hat und $\nu_1$ die Stufenzahl derjenigen Unterdeterminanten von $A'(\omega)$ bedeutet, welche zuerst nicht mehr sämtlich durch $\omega_1 - \omega$ teilbar sind, sodass $\lambda_{\nu_1} - \nu_0 + \nu_1 = 0$. Die Zahl $\nu_1$, und folglich auch $\nu$, ist hiernach, da $A'(\omega)$ eine Determinante $(n - \nu_0)^{\text{ten}}$ Grades ist, stets $< n - \nu_0$, was für den folgenden Beweis von Wichtigkeit ist.

Wir zerlegen den Beweis der ausgesprochenen Behauptung in zwei Teile, indem wir nacheinander zeigen:

a) *alle* Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$ sind *höchstens* durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar;

b) *alle* Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$ sind *mindestens* durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar.

a) Sei $P$ eine beliebige Unterdeterminante $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A(\omega)$, sodass $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu}$ die höchste in *allen* $P$ enthaltene Potenz von $\omega_1 - \omega$ ist. Eine solche Unterdeterminante $P$ entsteht aus $A(\omega)$ durch Strei-

chung von $\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen; es bleiben also von den $n-\nu_0$ letzten Zeilen in $A(\omega)$ mindestens $n-\nu_0-\nu$ — eine stets positive Anzahl — übrig. Die aus solchen $n-\nu_0-\nu$ Zeilen gebildeten Unterdeterminanten $(n-\nu_0-\nu)^{\text{ten}}$ Grades von $P$ sind nun entweder identisch Null (sobald nämlich nicht die sämtlichen $\nu_0$ ersten Colonnen, die ja nur Nullen enthalten, in jenen Zeilen gestrichen sind), oder sie sind Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$. Bezeichnen wir dieselben im letzteren Fall mit

$$L\,,\ M\,,\dots,\ N$$

und bezw. mit

$$L_1,\ M_1,\dots,\ N_1$$

ihre Adjuncten in der Determinante $P$, so ist

$$P = LL_1 + MM_1 + \cdots + NN_1\,. \tag{19}$$

Setzt man hier für $P$ successive alle Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A(\omega)$, so erhält man rechts für $L, M\dots, N$ successive alle Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$. Hieraus folgt zunächst, dass $\nu_1 \leq \nu_0$; denn wäre $\nu_1 > \nu_0$, so wären noch alle Unterdeterminanten $\nu_0^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$ und folglich nach (19) für $\nu = \nu_0$ auch alle Unterdeterminanten $\nu_0^{\text{ter}}$ Stufe von $A(\omega)$ durch $\omega_1-\omega$ teilbar, was ausgeschlossen ist. Da aber $\nu$ die Werte $1, 2, \dots, \nu_1$ durchläuft, so ist stets $\nu_0 - \nu > 0$, was für das unmittelbar Folgende von Wichtigkeit ist.

Nach Definition der Determinanten $L_1, M_1 \dots N_1$ sind nämlich mindestens $\nu_0-\nu$ Zeilen und mindestens $\nu_0-\nu$ Colonnen derselben aus den $\nu_0$ ersten Zeilen, bezw. $\nu_0$ ersten Colonnen von $A(\omega)$ entnommen. Enthält aber die Determinante $L_1$ z. B. irgend eine der $\nu_0$ ersten Colonnen von $A(\omega)$, während die gleichnamige Zeile von $A(\omega)$ fehlt, so ist $L_1 = 0$, andernfalls — wenn die gleichnamige Zeile nicht fehlt — kann dieses Reihenpaar gestrichen und statt dessen der Faktor $\omega_1 - \omega$ vor die ganze Determinante gesetzt werden. Wenn also eine der Determinanten $L_1\ M_1 \dots N_1$ zu jenen mindestens vorhandenen $\nu_0-\nu$ Colonnen, die aus den $\nu_0$ ersten Colonnen von $A(\omega)$ herrühren, nicht auch die bezw. gleichnamigen Zeilen aus $A(\omega)$ enthält, so ist sie Null, andernfalls mindestens durch $(\omega_1-\omega)^{\nu_0-\nu}$ teilbar. Wären also sämtliche Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$, d. h. sämtliche $L, M, \dots, N$ in allen Gleichungen (19) durch eine höhere Potenz von $\omega_1-\omega$ als $(\omega_1-\omega)^{\lambda_\nu-\nu_0+\nu}$ teilbar, so wären zufolge (19) sämtliche $P$ durch eine höhere Potenz von $\omega_1-\omega$ als $(\omega_1-\omega)^{\lambda_\nu}$ teilbar, was ausgeschlossen ist.

Wir haben somit die unter a) aufgestellte Behauptung erwiesen.

b) Um zu beweisen, dass *alle* Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$ auch *mindestens* durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar sind, verfahren wir folgendermassen. Es giebt mindestens eine von Null verschiedene Unterdeterminante $\nu_0^{\text{ter}}$ Stufe von $A(\omega)$, die nicht mehr durch $\omega_1 - \omega$ teilbar ist; wir bezeichnen eine solche mit $D$. Sie kann aus $A(\omega)$ nur entstehen, wenn alle $\nu_0$ ersten Colonnen wegfallen, da sie sonst $\equiv 0$ oder durch $\omega_1 - \omega$ teilbar wäre. $D$ ist also aus $n - \nu_0$ Zeilen der $n - \nu_0$ letzten Colonnen von $A(\omega)$ gebildet. Die Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $D$, deren Zahl

$$\mu_0 \equiv \binom{n - \nu_0}{\nu}$$

ist, bezeichnen wir durch

$$d_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, \mu_0),$$

ihre Adjuncten in $D$ bezw. durch

$$D_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots \mu_0).$$

Jede der Determinanten $D_{ik}$ ist also eine Determinante $\nu^{\text{ten}}$ Grades, gebildet aus den Elementen gewisser (durch den Index $i$ charakterisierten) $\nu$ Zeilen von $A(\omega)$ und gewisser (durch den Index $k$ angedeuteten) $\nu$ der $n - \nu_0$ letzten Colonnen von $A(\omega)$. Ferner bezeichnen wir die $\mu_0^2$ Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$ (die unter a) mit $L, M, \ldots, N$ typisch bezeichnet waren) jetzt anschaulicher durch

$$a'_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \ldots \mu_0),$$

wo die Indices $h$, $k$ andeuten, dass bei der Bildung von $a'_{hk}$ bestimmte $\nu$ Zeilen, bezw. bestimmte $\nu$ Colonnen von $A'(\omega)$ oder also von den $n - \nu_0$ letzten Zeilen und Colonnen von $A(\omega)$ gestrichen werden. Die Determinanten $a'_{hk}$ mit bestimmtem Index $k$ enthalten demnach gerade aus denjenigen Colonnen von $A(\omega)$ keine Elemente, aus deren Elementen die $D_{ik}$ mit demselben zweiten Index $k$ gebildet sind.

Nun betrachten wir die Summen

$$(20) \qquad \begin{cases} D_{11}\, a'_{h1} + \cdots + D_{1\mu_0}\, a'_{h\mu_0} \equiv S_{h1} \\ \quad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \qquad . \\ D_{\mu_0 1} a'_{h1} + \cdots + D_{\mu_0\mu_0} a'_{h\mu_0} \equiv S_{h\mu_0} \end{cases}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, \mu_0).$$

Nach der Definition der $D_{ik}$ ist jede dieser Summen $S_{hl}$ $(h, l = 1, 2, \ldots, \mu_0)$ wieder als Determinante $(n - \nu_0)^{\text{ten}}$ Grades darstellbar, indem man einfach die $n - \nu_0 - \nu$ zur Bildung von

$$a'_{h1}\ a'_{h2} \dots a'_{h\mu_0}$$

und die $\nu$ zur Bildung von

$$D_{l1}\ D_{l2} \dots D_{l\mu_0}$$

verwendeten Zeilen, deren jede $n - \nu_0$ Elemente enthält, untereinander setzt und die Determinante dieses quadratischen Systems von $(n - \nu_0)^2$ Elementen nimmt.

Die Determinante $S_{hl}$ ist daher identisch Null, wenn die Zeilen der $a'_h$ zum Teil mit denen der $D_l$ übereinstimmen (s. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 4. 1. S. 32), und sie ist — höchstens abgesehen vom Vorzeichen — gleich $A'(\omega)$, wenn die Zeilen der $a'_h$ und $D_l$ sich gerade zu denen von $A'(\omega)$ ergänzen. Die dritte, allein noch übrige Möglichkeit ist die, dass die $\nu$ Zeilen der $D_l$, ohne in irgend einer mit einer Zeile der $a'_h$ übereinzustimmen, zum Teil oder auch sämtlich den $\nu_0$ ersten Zeilen von $A(\omega)$ entstammen. Rändert man in diesem Falle die Determinante durch die Elemente von $\nu_0 - \nu$ anderen der $\nu_0$ ersten Zeilen und der gleichnamigen Colonnen von $A(\omega)$, so entsteht also eine Unterdeterminante $\nu^{\text{ter}}$ Stufe $P$ von $A(\omega)$, und es ist

$$P \equiv (\omega_1 - \omega)^{\nu_0 - \nu} S_{hl}. \tag{21}$$

Da aber sämtliche $P$ mindestens durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu}$ teilbar sind, so ist $S_{hl}$ in dem betrachteten Falle nach (21) durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar. In dem ersten der drei Fälle war $S_{hl} \equiv 0$, im zweiten ist $S_{hl} \equiv \pm A'(\omega)$ durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \nu_0}$, also den Ungleichungen (17) zufolge ebenfalls mindestens durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar. Die sämtlichen Grössen $S_{hl}$ sind also entweder Null oder mindestens durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar.

Fasst man nun in den Gleichungssystemen (20) die $a'_{hk}$ als Unbekannte auf, so ist die Determinante jedes dieser Gleichungssysteme (s. Baltzer, a. a. O. § 7. 6. S. 68)

$$|D_{ik}| \equiv D^{\binom{n - \nu_0 - 1}{\nu - 1}}$$

und daher nicht durch $\omega_1 - \omega$ teilbar. Da aber bei der Auflösung des Gleichungssystems (20) jedes $a'_{hk}$, multipliciert mit $|D_{ik}|$, eine lineare homogene Function der $S_{hl}$ wird, so folgt aus dem obigen Ergebnis für die letzteren, dass auch sämtliche $a'_{hk}$, d. h. sämtliche Unterdeterminanten $\nu^{\text{ter}}$ Stufe von $A'(\omega)$ mindestens durch die Potenz $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ von $(\omega_1 - \omega)$ teilbar sind.

Hiermit ist auch die unter b) aufgestellte Behauptung erwiesen, und wir haben somit bisher gezeigt:

*Sämtliche Unterdeterminanten $\nu^{ter}$ Stufe* $(\nu = 1, 2, \ldots, \nu_1)$ von $A'(\omega)$ *sind durch die Potenz*

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu},$$

*aber nicht sämtliche durch eine höhere Potenz von* $\omega_1 - \omega$ *teilbar.*

Mit $\nu_1$ bezeichneten wir die Stufenzahl derjenigen Unterdeterminanten von $A'(\omega)$, die zuerst nicht mehr sämtlich durch $\omega_1 - \omega$ teilbar sind. Also folgt aus dem soeben Bewiesenen für $\nu = \nu_1$

$$\lambda_{\nu_1} - \nu_0 + \nu_1 = 0$$

oder

(22) $$\lambda_{\nu_1} = \nu_0 - \nu_1.$$

Die Zerlegung des Teilers $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \nu_0}$ von $A'(\omega)$ in Elementarteiler lautet daher

(23) $$(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \nu_0} \equiv$$
$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \lambda_1 - 1} \ldots (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1 - 2} - \lambda_{\nu_1 - 1} - 1} \cdot (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1 - 1} - \nu_0 + \nu_1 - 1},$$

während diejenige des Teilers $(\omega_1 - \omega)^{\lambda}$ von $A(\omega)$

(24) $$(\omega_1 - \omega)^{\lambda} \equiv$$
$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \lambda_1} \ldots (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1 - 2} - \lambda_{\nu_1 - 1}} \cdot (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1 - 1} - \lambda_{\nu_1}} \ldots (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_0 - 1}}$$

war. Mit Rücksicht auf Gleichung (22) ist also der Casorati'sche Satz in Bezug auf die $\nu_1$ ersten Elementarteiler von $A(\omega)$ und, wenn $\nu_1 = \nu_0$, schon ganz allgemein bewiesen. Ist dagegen $\nu_1 < \nu_0$, so stehen den Elementarteilern

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1} - \lambda_{\nu_1 + 1}}, \ldots, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_0 - 1}}$$

von $A(\omega)$ gar keine Elementarteiler von $A'(\omega)$ oder — wie wir dafür sagen können — solche vom nullten Grad gegenüber. Der Satz wird also auch für die letzteren Elementarteiler bewiesen sein, wenn gezeigt ist, dass der Grad eines jeden derselben gleich der Einheit ist, d. h. dass dies lauter einfache Elementarteiler von $A(\omega)$ sind. Multipliciert man zu dem Ende (23) mit $(\omega_1 - \omega)^{\nu_0}$, so muss die Summe der Exponenten von $\omega_1 - \omega$ auf der rechten Seite von (23) und (24) denselben Wert haben. Dies ergiebt aber die Gleichung

(25) $$(\lambda_{\nu_1} - \lambda_{\nu_1 + 1}) + (\lambda_{\nu_1 + 1} - \lambda_{\nu_1 + 2}) + \cdots + \lambda_{\nu_0 - 1} \equiv \nu_0 - \nu_1,$$

wo links nach (17) die Summe von $\nu_0 - \nu_1$ positiven ganzen Zahlen steht. Diese hat den Wert $\nu_0 - \nu_1$; folglich ist

$$\lambda_{\nu_1} - \lambda_{\nu_1 + 1} = \lambda_{\nu_1 + 1} - \lambda_{\nu_1 + 2} = \cdots = \lambda_{\nu_0 - 1} = 1.$$

Hiermit ist der Casorati'sche Satz ganz allgemein bewiesen.

Da für die Determinante $A'(\omega)$ die den Ungleichungen (17) analogen Ungleichungen gelten, folgt noch, dass *nur* die $\nu_0 - \nu_1$ letzten Elementarteiler von $A(\omega)$ *einfache*, alle vorangehenden aber höheren als ersten Grades sind. Wendet man daher den Casorati'schen Satz dann auf $A'(\omega)$ abermals an, bezw. auf eine Determinante, die in ihren Elementarteilern mit $A'(\omega)$ übereinstimmt, aber schon die Gestalt von $A(\omega)$ hat, u. s. w., so ergiebt sich — nebenbei bemerkt — gleichzeitig noch der Satz:

*Die Grade der Elementarteiler einer Determinante $A(\omega)$ stehen in der Beziehung*

$$\lambda - \lambda_1 \geqq \lambda_1 - \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_{\nu_0 - 1} .$$

# Register der angewandten Bezeichnungen.

(Die beigefügten Seitenzahlen beziehen sich auf die Stelle, wo der betreffende Ausdruck eingeführt wird.)